

## 円弧スリット領域への数値等角写像の方法

天 野 要†

原点を中心とする同心円弧状の曲線スリットを伴う複素平面を円弧スリット領域と呼ぶ。本論文では、与えられた幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から円弧スリット領域への数値等角写像の方法を提案する。また、典型的な領域に対する数値実験を行って、その有効性を検証する。問題の領域は単一の Jordan 閉曲線の外側であってもよい。このような等角写像は渦点と障害物を伴う 2 次元ポテンシャル流に関係し、応用上も重要である。具体的には、代用電荷法によって 1 対の共役な調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で表現して、問題の等角写像の近似写像関数を構成する。1 価連続な近似写像関数を得るためには、複素対数ポテンシャルの計算に注意が必要である。

## Numerical Conformal Mapping onto the Circular Slit Domains

KANAME AMANO†

A circular slit domain is the entire plane with slits along concentric circular arcs whose common center is the origin. In this paper, we present a simple numerical method for computing conformal maps from a domain exterior to closed Jordan curves onto a circular slit domain. The mapping is important in problems of two-dimensional vortex flow with obstacles. The numerical method is based on the charge simulation method, in which conjugate harmonic functions are approximated by a linear combination of complex logarithmic potentials. Some examples show the effectiveness of the method.

## 1. はじめに

Riemann の写像定理によれば、少なくとも 2 つの境界点を持つ任意の単連結領域は互いに等角同値であり、いずれも単位円の内部に等角写像することができる。しかし、多重連結領域の場合には、単位円のような単一の理想的な標準領域は存在しない。このことは、等角写像が同相写像であり、領域の多重度を保存することから明らかである。したがって、多重度の異なる領域には異なる標準領域を設定しなければならない。さらに、多重連結領域の場合には、領域の多重度を固定してもなお単一の理想的な標準領域は存在しない。相互に等角写像できるのはモジュラスと呼ばれる保存量を名じくする領域間に限られる。

最も簡単な多重連結領域である 2 重連結領域の場合には、任意の領域を 2 つの同心円で囲まれた円環領域  $r_1 < |w| < r_2$  へ等角写像することができる。この同心円の半径の比  $r_2/r_1$  がモジュラスであり、相互に等角写像できるのはこの比を同じくする領域間に限られ

る。一般的に、 $n$  ( $\geq 3$ ) 重連結領域は  $3n-6$  個の実数値をモジュラスに持ち、相互に等角写像できるのはこれらの値を同じくする領域間に限られる。

しかし、多重連結領域の場合にも、標準領域の幾何学的な形状を適当に設定すれば、領域の多重度とモジュラスの値を固定することなく等角写像の問題を議論することが可能である。このような領域はスリットを伴う。典型的な標準領域としては、(a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリットを伴う円板領域、(e) 円弧スリットを伴う円環領域、等がある。応用上重要な問題の多くはこのような標準領域の場合である。

多重連結領域の等角写像の存在と一意性に関しては Nehari<sup>1)</sup> に詳しい。しかし、その数値計算法、すなわち数値等角写像の方法、は必ずしも十分に研究されていない。また、比較的最近までの数値等角写像の方法に関しては Gaier<sup>2)</sup>, Henrici<sup>3)</sup>, Trefethen<sup>4)</sup> に詳しい。Trefethen<sup>4)</sup> には有界な多重連結領域から円弧スリットを伴う円板または円環領域への等角写像の積分方程式法による計算例<sup>5), 6)</sup> も見られる。

本論文では、幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から円弧スリット領

† 愛媛大学工学部情報工学科  
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

域への数値等角写像の方法を提案する。また、典型的な領域に対する数値実験を行って、その有効性を検証する。問題の領域は単一の Jordan 閉曲線の外側であってもよい。このような等角写像は渦点と障害物を伴う 2 次元ポテンシャル流に関係し、応用上も重要である。具体的には、単連結領域や 2 重連結領域の場合<sup>7)-10)</sup>と同様に、代用電荷法によって 1 対の共役な調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似する。しかし、得られた近似写像関数が問題の領域で 1 価連続であるためには、複素対数ポテンシャルの計算に注意が必要である。

なお、代用電荷法の実用的側面に関しては村島<sup>11)</sup>、数学的側面に関しては岡本・桂田<sup>12)</sup>等も参照されたい。

## 2. 写像定理

原点を中心とする同心円弧状の曲線スリットを伴う複素平面の全体を円弧スリット領域と呼ぶ。任意の多重連結領域  $D$  はこのような円弧スリット領域へ等角写像することができる<sup>1)</sup>。さらに、 $D$  内に異なる 2 点  $u, v$  を取り、 $u$  は原点に、 $v$  は無限遠点に移り、 $v$  における写像関数の留数が 1 であるという正規化条件の下に、この等角写像は一意的に定まる。留数の条件は写像関数の定数倍、幾何学的には拡大または縮小と回転、の任意性を解消する。

ここでは、図 1 のように、領域  $D$  は  $z$  平面上に与えられた  $n$  個の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な  $n$  重連結領域であるとする。この領域は  $n=1$  すなわち単一の Jordan 閉曲線の外側であってもよい。さらに、 $u$  を座標系の原点に、 $v$  を無限遠点に取って、 $D$  から  $w$  平面上の円弧スリット領域への等角写像を考える。その写像関数を  $w=f(z)$  とすれば、問題の正規化条件は  $f(0)=0$ ,  $f(\infty)=\infty$  および  $f'(\infty)=1$  となる。無限遠点における条件は写像関数の  $f(z) \sim z$  ( $z \rightarrow \infty$ ) なる漸近関係を意味する。写像の結果、曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  は原点を中心とし、半径がそれぞれ  $r_1, r_2, \dots, r_n$  なる円弧スリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  に移るとする。円弧の位置と長さは写像関数とともに定まる。

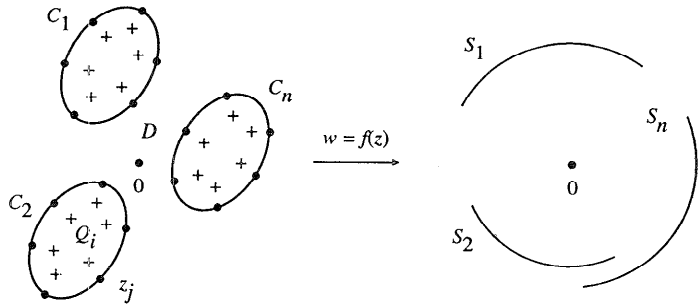


図 1 円弧スリット領域への等角写像と代用電荷法

Fig. 1 Conformal mapping onto the circular slit domain. The normalizing condition is  $f(0)=0$ ,  $f(\infty)=\infty$  and  $f'(\infty)=1$ . Boundary curves  $C_1, C_2, \dots, C_n$  are mapped onto the circular slits  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .  $Q_i$  and  $z_j$  are simulation charges and collocation points, respectively.

このような等角写像は、例えば、原点に渦点が存在し、曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  で囲まれた領域に障害物が存在する場合の 2 次元ポテンシャル流に関係している。

問題の等角写像の写像関数を

$$f(z) = z \exp(g(z) + ih(z)) \quad (1)$$

と表現する。ここに、 $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で共役な調和関数である。曲線  $C_l$  がスリット  $S_l$  に移るという境界条件  $|f(z)| = r_l$  ( $z \in C_l$ ) から、 $g(z)$  は

$$g(z) + \log |z| = \log r_l \quad (2)$$

$$(z \in C_l, l=1, 2, \dots, n)$$

なる関係を満たさなければならない。また、無限遠点における正規化条件  $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 1$  から、 $g(z)$  と  $h(z)$  は

$$g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (3)$$

すなわち  $g(\infty) = h(\infty) = 0$  なる関係を満たさなければならない。

逆に、(2)式と(3)式が成立すれば、(1)式の  $f(z)$  が問題の等角写像の正規化条件を満たすことは容易にわかる。一意性から、等角写像の問題はこのような共役な調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  を求める問題に帰着する。

## 3. 数値写像の方法

### 3.1 代用電荷法の適用

これらの共役な調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  に代用電荷法を適用し、問題の領域  $D$  の外部すなわち曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の内側に配置された  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個、計  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$  個、の電荷点  $\zeta_i$  (または  $\zeta_{i,j}$ , 以下同様) を極とする複素対数ポテンシャルの 1 次結合

$$\begin{aligned}
 G(z) + iH(z) &= \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (4)
 \end{aligned}$$

で近似して、問題の等角写像の近似写像関数

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)) \quad (5)$$

を得ることができる。未定係数である電荷  $Q_i$  (または  $Q_{li}$ , 以下同様) は境界  $C_1, C_2, \dots, C_n$  上に配置された  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個, 計  $N$  個, の拘束点  $z_j$  (または  $z_{lj}$ , 以下同様) で境界条件(2)を満たすように定められる。すなわち, 拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_{lj} - \zeta_i| + \log|z_{lj}| = \log R_l \quad (6)$$

$$(z_{lj} \in C_l, j=1, 2, \dots, N_l, l=1, 2, \dots, n)$$

を満たさなければならない。  $R_l$  は  $r_l$  の近似値である。また, 無限遠点における正規化条件(3)から,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0 \quad (7)$$

でなければならない。

(6)式と(7)式は問題の等角写像の近似写像関数を構成するための必要条件であり, 十分条件ではない。実際,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  と  $R_1, R_2, \dots, R_n$  という  $N+n$  個の未知数に対して, 得られた条件式は  $N+1$  個にすぎない。

問題の領域  $D$  では, (4)式の虚部

$$H(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i)$$

は一般的に無限多価である。これが1価であるためには, さらに,  $D$  内の任意の閉曲線  $\tilde{C}$  に対して

$$\int_{\tilde{C}} dH(z) = 0$$

でなければならない。この条件は, 曲線  $C_l$  のみを囲む任意の閉曲線  $\tilde{C}_l$  に対して, 個別に

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{C}_l} dH(z) &= \int_{\tilde{C}_l} d \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N Q_i \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_{li}) \\
 &\quad + \sum_{k \neq l} \sum_{i=1}^{N_k} Q_{ki} \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_{ki})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

が成立することと同値である。(7)式と(8)式は独立ではなく, 後者が成立すれば前者も成立する。

(6)式と(8)式は  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  と  $\log R_1, \log R_2, \dots, \log R_n$  という  $N+n$  個の未知量に対する  $N+n$  元の連立1次方程式を構成する。これを解いて  $Q_i$  と  $R_l$  が定まれば, 各点ごとに(4)式と(5)式で近似写像関数  $F(z)$  の値を計算することができる。この  $F(z)$  が問題の等角写像の正規化条件を満たすことは容易にわかる。

以上の方法は以下のように整理することができる。

まず, 近似写像関数は

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \quad (5)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) \quad (4)$$

である。未定係数である電荷  $Q_i (i=1, 2, \dots, N)$  は, スリットの半径  $R_l (l=1, 2, \dots, n)$  とともに,  $N+n$  元の連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_{lj} - \zeta_i| - \log R_l = -\log|z_{lj}|, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (8)$$

$$(z_{lj} \in C_l, j=1, 2, \dots, N_l, l=1, 2, \dots, n)$$

を解いて得られる。これを

$$Ax = b$$

と行列形で記せば

$$A = \begin{pmatrix} \log|z_{11} - \zeta_1| & & & -1_{N_1} \\ \mathbf{1}_{N_1}^T & & & \\ & \ddots & & \\ & & \log|z_{n1} - \zeta_1| & -1_{N_n} \\ & & & 0 \\ & & & & \mathbf{1}_{N_n}^T \end{pmatrix}$$

$$x = (Q_1, \dots, Q_N, \log R_1, \dots, \log R_n)^T,$$

$$b = (-\log|z_{11}|, \dots, -\log|z_{nN}|, 0, \dots, 0)^T$$

となる。ここに,  $\mathbf{1}_{N_l}$  はすべての要素が1の  $N_l$  次元ベクトルである。

### 3.2 主値関数と連続性

複素対数ポテンシャルの計算には注意が必要である。すなわち, (4)式の虚部  $H(z)$  は問題の領域で1価であると同時に連続でなければならない。しかし,

通常の複素平面では、関数  $\arg$  の値域は特定の長さ  $2\pi$  の区間に限定される。一般性を失うことなく、主値関数  $\text{Arg}$  を採用して、この区間を  $(-\pi, \pi]$  の範囲に取ることができる。 $\text{Arg}$  は負の実軸上に  $2\pi$  の不連続を伴うが、このような不連続の問題はどのような区間を取っても不可避である。一般に、不連続の問題はある半直線上で生じるので、これを不連続線と呼ぶことにする。我々は不連続線を伴う関数  $\text{Arg}$  を用いて問題の領域で連続な関数  $H(z)$  を近似しなければならない。

$\text{Arg}(z-\zeta_i)$  は  $\zeta_i$  の左側に不連続線を伴う。したがって、

$$H(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z-\zeta_i) \quad (9)$$

は領域  $D$  に  $N$  本の不連続線を伴い、このままでは連続関数を近似することはできない。

ここでは、(8)式が成立することに着目し、個々の曲線  $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の内側に配置された電荷ごとに項をまとめて、(9)式を

$$\begin{aligned} II(z) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} Q_{ik} \text{Arg}(z-\zeta_{ik}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{N_i-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{ik} \right) \right. \\ &\quad \left. (\text{Arg}(z-\zeta_{ik}) - \text{Arg}(z-\zeta_{i,i+1})) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{k=1}^{N_i} Q_{ik} \right) \text{Arg}(z-\zeta_{iN_i}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{N_i-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{ik} \right) \text{Arg} \left( \frac{z-\zeta_{ik}}{z-\zeta_{i,i+1}} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

と変形する。 $\text{Arg}(z-\zeta_{ik})/(z-\zeta_{i,i+1})$  の不連続線は電荷点  $\zeta_i$  と  $\zeta_{i+1}$  を結んだ直線上に現れる。したがって、(10)式の不連続線は個々の曲線  $C_i$  の内側に配置された  $N_i$  個の電荷点を順に結んだ直線上に現れる。したがって、電荷点がある程度密に配置すれば、 $C_i$  の形の如何にかかわらず、不連続線を  $C_i$  の内側の領域に閉じ込めて、この問題を解消することができる。

### 3.3 誤差評価

解析関数の最大値の原理によれば、連続開領域で解析的で定数ではない関数の絶対値はその内部で最大値を取らない。または、有界閉領域で連続で内部で解析的な関数の絶対値は境界上で最大値を取る。

しかし、問題の領域  $D$  は原点とともに無限遠点を含む。絶対誤差

$$\begin{aligned} E_F(z) &= |F(z) - f(z)| \\ &= |f(z)| |\exp\{G(z) - g(z) \\ &\quad + i(H(z) - h(z))\} - 1| \end{aligned}$$

の値は無限遠点で  $\lim_{z \rightarrow \infty} F_F(z) = \infty \cdot 0$  型の不定形になる。したがって、その最大値の評価は不可能である。一方、相対誤差

$$\begin{aligned} E_L(z) &= \left| \frac{F(z) - f(z)}{f(z)} \right| \\ &= |\exp\{G(z) - g(z) + i(H(z) - h(z))\} - 1| \end{aligned}$$

の値は無限遠点で  $\lim_{z \rightarrow \infty} E_L(z) = 0$  である。原点でも不定形にはならない。したがって、連立1次方程式を解く過程で生じる数値的な誤差が無ければ、相対誤差は境界  $C_1, C_2, \dots, C_n$  上のいずれかの点で最大値を取る。

## 4. 数値実験と考察

計算結果の提示には次の記号が用いられる。

$N$ : 拘束点数=電荷数。以下の例では  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$  とする。したがって、その総数は  $nN$  である。

$q$ : 電荷配置のパラメータ ( $0 < q < 1$ )。

$C_N$ : 連立1次方程式の係数行列の  $L_1$  条件数。

数値実験は東芝 AS4080/51 GX 上の f77 倍精度計算による。連立1次方程式の計算と条件数の評価には IMSL の DLFCRG と DLFSRG を使用する。解の反復改良は行わない。

### 例1 円の外部

$$D: |z-a| > 1 \quad (|a| > 1)$$

拘束点と電荷点は

$$z_j = a + \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i,$$

$$\zeta_j = a + q \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i$$

と配置する。写像関数は

$$f(z) = \frac{z(z-a)}{z-(a-1/\bar{a})},$$

スリットの半径は

$$r = |a|$$

である。 $\bar{a}$  は  $a$  の共役複素数である。この  $f(z)$  は文献 1) の結果 (p. 340, Exercise 1 の  $P(z; u, v)$ ) から導くことができる。これが問題の正規化条件と  $|f(z)| = |a|$  ( $z \in C$ ),  $f'(z) \neq 0$  ( $z \in D$ ) を満たすことも簡単な計算でわかる。この解析解との直接的な比較により、誤差の指標として

$$E_M = \max_j |F(z_{j+1/2})| - r,$$

$$E_F = \max_j \{|F(z_{j+1/2}) - f(z_{j+1/2})|, |F(z_j) - f(z_j)|\},$$

$$E_R = |R - r|$$

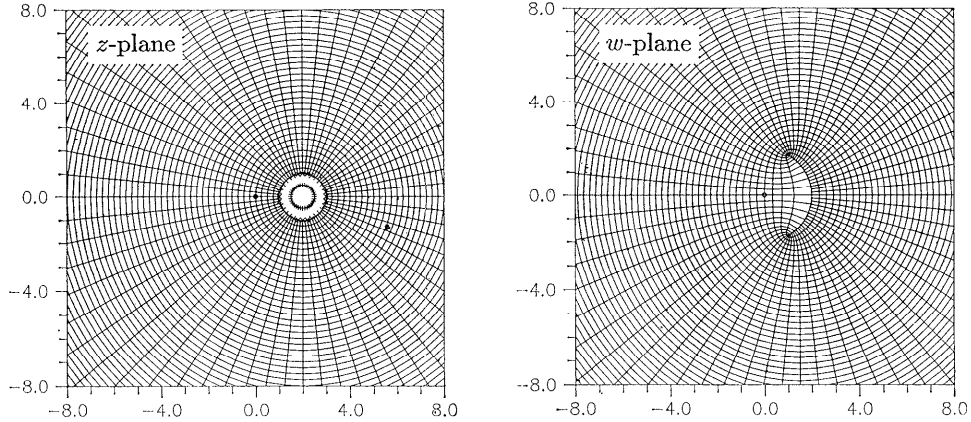


図 2 数値等角写像 (例 1:  $N=32, q=0.5$ )  
 Fig. 2 Numerical mapping of the exterior of a disk:  $|z-2|>1$ .

表 1 計算精度 (例 1,  $a=2$ )  
 Table 1 Accuracy of numerical results for the exterior of a disk:  $|z-2|>1$ .  $N^*$  shows the case of ill-condition.

$q$	$N$	$E_M$	$E_F$	$E_R$	$C_N$
0.2	16	$9.7 \times 10^{-4}$	$9.7 \times 10^{-4}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$3.1 \times 10^6$
	32	$2.1 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-11}$	$2.4 \times 10^{12}$
	64*	$4.4 \times 10^{-7}$	$6.6 \times 10^{-7}$	$4.1 \times 10^{-8}$	$7.7 \times 10^{18}$
	128*	$1.9 \times 10^{-7}$	$2.4 \times 10^{-7}$	$8.1 \times 10^{-9}$	$2.5 \times 10^{19}$
0.5	16	$1.9 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$2.0 \times 10^3$
	32	$1.5 \times 10^{-11}$	$1.5 \times 10^{-11}$	$1.5 \times 10^{-11}$	$1.0 \times 10^6$
	64	$9.3 \times 10^{-15}$	$1.2 \times 10^{-14}$	0.0	$1.4 \times 10^{11}$
	128*	$2.2 \times 10^{-14}$	$2.3 \times 10^{-14}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$3.8 \times 10^{18}$
0.8	16	$2.3 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-6}$	$4.7 \times 10^1$
	32	$4.3 \times 10^{-4}$	$4.3 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-11}$	$5.7 \times 10^2$
	64	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-7}$	0.0	$4.0 \times 10^4$
	128	$5.7 \times 10^{-14}$	$5.7 \times 10^{-14}$	0.0	$1.0 \times 10^8$

表 2 計算精度 (例 1,  $a=5$ )  
 Table 2 Accuracy of numerical results for the exterior of a disk:  $|z-5|>1$ .  $N^*$  shows the case of ill-condition.

$q$	$N$	$E_M$	$E_F$	$E_R$	$C_N$
0.2	16	$2.1 \times 10^{-12}$	$2.1 \times 10^{-12}$	$2.0 \times 10^{-12}$	$3.1 \times 10^6$
	32	$3.3 \times 10^{-14}$	$4.3 \times 10^{-14}$	$8.9 \times 10^{-16}$	$2.4 \times 10^{12}$
	64*	$1.6 \times 10^{-13}$	$1.6 \times 10^{-13}$	$5.3 \times 10^{-15}$	$1.1 \times 10^{10}$
	128*	$8.4 \times 10^{-13}$	$8.7 \times 10^{-13}$	$2.1 \times 10^{-14}$	$4.5 \times 10^{19}$
0.5	16	$3.0 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-12}$	$2.0 \times 10^3$
	32	$2.9 \times 10^{-10}$	$2.9 \times 10^{-10}$	$8.9 \times 10^{-16}$	$1.0 \times 10^6$
	64	$6.8 \times 10^{-14}$	$9.5 \times 10^{-14}$	$8.9 \times 10^{-16}$	$1.4 \times 10^{11}$
	128*	$8.2 \times 10^{-13}$	$8.7 \times 10^{-13}$	$9.8 \times 10^{-15}$	$6.0 \times 10^{18}$
0.8	16	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-12}$	$4.7 \times 10^1$
	32	$1.8 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-4}$	$8.9 \times 10^{-16}$	$5.7 \times 10^2$
	64	$6.9 \times 10^{-8}$	$6.9 \times 10^{-8}$	$1.8 \times 10^{-15}$	$4.0 \times 10^4$
	128	$1.0 \times 10^{-13}$	$1.1 \times 10^{-13}$	$2.7 \times 10^{-15}$	$1.0 \times 10^8$

を計算する。  $z_{j+1/2}$  は境界上の拘束点  $z_j$  と  $z_{j+1}$  の中間点である。

図 2 と表 1, 2 に計算結果を示す。左図は  $z$  平面, 右図は  $w$  平面で,  $z$  平面上の  $\bullet, +, \times$  はそれぞれ座標系の原点, 電荷点, 拘束点である。これらの結果から以下のことがわかる。

パラメータ  $N, q, a$  の広い範囲で高い精度が得られる。  $q$  の値を小さくして電荷を境界から離せば, 少ない電荷で精度を上げることができるが, 連立 1 次方程式の条件数は大きくなる。  $N^*$  は IMSL の DLFCRG から悪条件の警告が出力された場合である。  $a$  の値を大きくして円を原点から離すと誤差は減少する。

誤差の指標の間には, 表 1 ( $a=2$ ) の  $q=0.5$  と表 2 ( $a=5$ ) の  $q=0.2$  の場合を除いて,

$$E_R \ll E_M \approx E_F$$

なる関係が成立している。このとき,  $R$  の精度は十分に高く, 解析解が知られていなくても

$$E_M \approx \max_j |F(z_{j+1/2})| - R$$

が数値写像の精度の良い指標となる。また, 相対誤差の最大値は

$$E_L = \max_C E_L(z) \approx \frac{E_M}{R}$$

となる。

表 1 の  $q=0.5$  と表 2 の  $q=0.2$  の場合は次のような意味で特例である。解析解は

$$f(z) = z \exp \{ \log(z-a) - \log(z-(a-1/\bar{a})) \}$$

と変形することができる。すなわち,  $\zeta_1 = \bar{a}$  と  $\zeta_2 = a-1/\bar{a}$  に  $Q_1=1$  と  $Q_2=-1$  なる 2 個の電荷を配置す

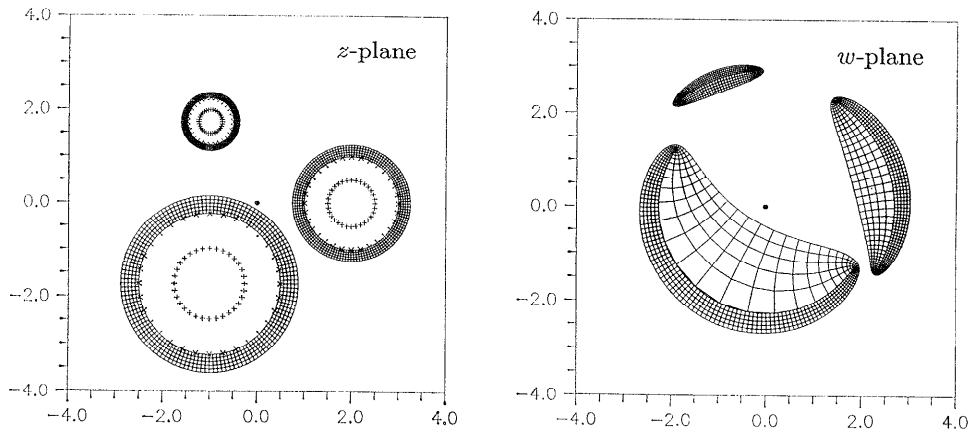


図 3 数値等角写像 (例 2:  $N=32, q=0.5$ )  
 Fig. 3 Numerical mapping of the exterior of three disks:  $|z-2|>1$ ,  
 $|z+1-\sqrt{3}i|>0.5$  and  $|z+1+\sqrt{3}i|>1.5$ .

表 3 計算精度 (例 2,  $q=0.5$ )  
 Table 3 Accuracy of numerical results for the exterior of three disks.  $N^*$  shows the case of ill-condition.

$N$	$E_M$	$E_R$	$R$	$C_N$	
16	$C_1$	$5.7 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-3}$	2.694	$6.7 \times 10^3$
	$C_2$	$5.4 \times 10^{-5}$	$8.4 \times 10^{-4}$	2.9130	
	$C_3$	$1.2 \times 10^{-1}$	$8.1 \times 10^{-4}$	2.2662	
32	$C_1$	$2.7 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-6}$	2.695854	$3.5 \times 10^6$
	$C_2$	$8.5 \times 10^{-10}$	$8.7 \times 10^{-6}$	2.912170	
	$C_3$	$7.9 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-6}$	2.265377	
64	$C_1$	$1.2 \times 10^{-9}$	$5.2 \times 10^{-7}$	2.6958524	$4.6 \times 10^{11}$
	$C_2$	$1.2 \times 10^{-9}$	$1.5 \times 10^{-7}$	2.9121788	
	$C_3$	$4.5 \times 10^{-5}$	$2.1 \times 10^{-7}$	2.2653737	
128*	$C_1$	$6.5 \times 10^{-6}$			$1.3 \times 10^{19}$
	$C_2$	$7.7 \times 10^{-6}$			
	$C_3$	$5.7 \times 10^{-6}$			

れば、代用電荷法の解は解析解に一致する。上記の場合には、電荷点の1つが  $\zeta_2$  に重なって、比較的少ない電荷で高い精度を得ることができる。このような場合にも、誤差の指標の間には

$$E_R \leq E_M \approx E_F$$

なる関係が成立している。

例 2 3つの円の外部

$$D: |z-z_{0l}| > \rho_l,$$

$$z_{0l} = 2 \exp \frac{2(l-1)}{3} \pi i$$

$$\rho_1=1, \rho_2=0.5, \rho_3=1.5$$

拘束点と電荷点は

$$z_{lj} = z_{0l} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i,$$

$$\zeta_{lj} = z_{0l} + q \rho_l \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i$$

と配置する。解析解は知られていない。ここでは、誤差の指標として、境界曲線ごとに

$$E_M = \max_j |F(z_{j+1/2}) - R|,$$

$$E_R = |R - r^*|$$

を計算する。 $r^*$  は電荷の数を倍増した場合の計算値である。

図3と表3に計算結果を示す。3つの円に適合した格子を描くことはできないので、各円の境界付近を個別に図示した。スリットの半径  $R$  は電荷を倍増して異なる数字が現れる桁までの値である。

表 ( $q=0.5$ ) では、電荷数の増加とともに精度は向上するが、同時に連立1次方程式の条件数が増大し、 $N=128$  では悪条件となって、逆に精度が低下している。しかし、電荷を境界に近付ければ精度の大幅な改善が可能である。例えば、 $N=128, q=0.8$  の結果は  $E_M=C_1: 7.7 \times 10^{-14}, C_2: 1.8 \times 10^{-13}, C_3: 4.6 \times 10^{-9}, C_N=3.8 \times 10^8$  である。

この例でも、 $E_M$  が最大値を取る曲線上では

$$E_R \ll E_M$$

なる関係が成立している。

5. おわりに

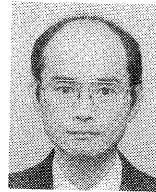
幾つかの Jordan 閉曲線の外側の非有界な多重連結領域から円弧スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、典型的な領域に対する数値実験を行って、その有効性を検証した。この方法は、原理とプログラミ

ングが簡単で、なめらかな境界の問題では高い精度を期待することができる。このような等角写像の簡単で精度の高い計算法は知られていなかった。

円弧スリット領域への等角写像は応用数学や流体力学では極めて一般的な話題である。例えば、流体力学では、上記の写像関数の絶対値と偏角の等高線は渦点と障害物を伴う2次元ポテンシャル流の流線と等速度ポテンシャル線を与える。しかし、このような流れの解析は基本的には逆写像の問題であり、その計算法は今後の課題としたい。

### 参考文献

- 1) Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, pp. 333-392, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
- 2) Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, p. 294, Springer-Verlag, Berlin (1964).
- 3) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-570, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 4) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, p. 269, North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1&2 (1986).
- 5) Reichel, L.: A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1&2, pp. 125-142 (1986).
- 6) Mayo, A.: Rapid Methods for the Conformal Mapping of Multiply Connected Regions, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1&2, pp. 143-153 (1986).
- 7) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 8) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 9) 天野 要: 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 10) Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *J. Comput. Appl. Math.* (1994, to appear).
- 11) 村島定行: 代用電荷法とその応用, p. 194, 森北出版, 東京 (1983).
- 12) 岡本 久, 桂田祐史: ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, Vol. 2, No. 3, pp. 2-20 (1992).  
(平成6年9月19日受付)  
(平成6月11月17日採録)



天野 要 (正会員)

1948年生。1971年京都大学工学部電子工学科卒業。1978年北海道大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。工学博士。同年北海道大学大型計算機センター助手。現在愛媛大学工学部情報工学科教授。研究分野は数値解析と数理情報学。特に数値複素解析, パターン認知, 情報システム学等。情報処理学会創立30周年記念論文賞受賞。日本数学会, 日本応用数学会, 電子情報通信学会, 日本心理学会, ACM 各会員。