

1次元セルオートマトンの時系列フラクタル解析

西村 治彦[†] 新地 辰朗[†]

力学系アトラクタとの対応により、セルオートマトンの多様な挙動パターンが Wolfram によって4つのクラスに分類されて以来、クラス4は秩序的なクラス1, 2と無秩序(カオス)的なクラス3の境界に位置する特異な存在として、様々な視点から注目されてきた。本論文では、このクラス4とクラス3の違いを定量化する新たな試みとして、1次元2状態セルオートマトンに時系列フラクタル解析の手法を適用する。セル配列全体を時系列ベクトルデータとすることにより、挙動の大域的性質が精確に捉えられる。その結果、3近傍と5近傍ルールの具体的評価を通して、クラス4はフラクタル次元が大きく異なる粗視化時間構造の重ね合せ状態であることが明らかとなった。従って、ここでの解析法は、セルオートマトンのクラス分類を定量化する指標として十分有効であると言える。

Fractal Analysis of One-dimensional Cellular Automata as Time-series Vectors

HARUHIKO NISHIMURA[†] and TATSURO SHINCHI[†]

Since spatio-temporal behaviors of cellular automata (CA) were classified into 4 classes by Wolfram on the analogy of dynamical systems, Class 4 has been remarked as a unique existence which occupies the boundary region between ordered Class 1, 2 and disordered (chaotic) Class 3. In this paper, we propose a new method of fractal analysis for one-dimensional, 2-state CA in order to make quantitatively clear the difference between Class 3 and Class 4. This method enables to grasp the global properties of CA's behavior by dealing with the whole array of cells as a time-series vector. Through the evaluation of 3-neighbor and 5-neighbor rules, it is found that Class 4 has a quite different structure of fractal dimension compared with Class 3.

1. はじめに

セルオートマトンは計算機上で取り扱いやすい(時間・空間・状態がすべて離散な)大自由度力学系モデルであり、これまでも物理学、生物学、情報科学など広い分野でシミュレータとして利用されてきた^{1),2)}。また、セルオートマトンが示す多様な複雑挙動自体が、複雑性や自己組織化現象を探究する複雑系の科学や人工生命の分野における研究対象となっている²⁾⁻⁵⁾。

Wolfram⁶⁾は、力学系アトラクタとのアナロジーから、セルオートマトンの挙動パターンはクラス1~4の4つのクラスに分類でき、クラス4は秩序的なクラス1,2と無秩序でカオス的なクラス3の境界的な存在であると指摘した。この描像を定量的に裏付けるべく、これまでにセル間の相関、摂動拡大率、エントロピー、

相互情報量などいくつかの指標が提案され、その有効性が検討されてきた^{7),9)-11)}。しかしながら、いずれの場合もクラス3とクラス4の判別に関して、単独で決定的な役割を果たし得るものでないのが現状である。

そこで本研究では、このクラス4とカオス的なクラス3の違いを定量化する新たな試みとして、時系列データに対するフラクタル解析の立場から1次元セルオートマトンを取り扱うことにする¹²⁾。その際、セル配列全体が有する挙動の大域的性質を精確に評価するため、配列全体を1つの状態ベクトルとし、ここでの時系列解析の基本量とする。

以下、第2章では、本研究の対象である1次元(2状態)セルオートマトンとその挙動のクラス分類について述べ、次章以降の準備とする。第3章では、状態ベクトルに対する時系列解析の方法として時間自己相関関数とフラクタル解析を定義、導入し、これらの評価法を用いて第4章で、3近傍と5近傍のセルオートマトンの挙動複雑性を具体的に検討する。最後に第5章で、本論文での結論と留意点について述べる。

[†] 兵庫教育大学情報科学研究室
Department of Information Science, Hyogo University
of Teacher Education

2. 1次元セルオートマトンとその挙動分類

2.1 1次元セルオートマトン

2.1.1 セルオートマトンの定義

オートマトン (automaton) とは、入力と内部状態から出力と次の内部状態が自動的に決定されるシステムをさす。そして、形式言語処理、計算機理論、自己増殖システム等の立場からの研究の基礎となっている¹³⁾。一般に、有限オートマトン M は以下の記号を用いて

$$M=(Q, \Sigma, f, q_0, F) \tag{1}$$

Q : 内部状態の有限集合

Σ : 入力記号の有限集合

f : Q と Σ から次の Q を決める ($Q \otimes \Sigma \rightarrow Q$) 関数で、状態遷移関数と呼ぶ

q_0 : Q の要素で初期状態

F : Q の部分集合で、受理状態の集合

と定義される。すなわち、有限オートマトンでは、出力を出す代わりに、オートマトンの最後の状態が F の要素となるときに入力を受理 (認識) するという仕組みをもつ。

さて、セルオートマトンは、時間、空間、状態のすべてが離散化された状況下で、この有限オートマトンが同一素子としてセル (cell) 構造に多数結合された系として定義される。この各素子 (以後、セルと呼ぶ) は有限個の内部状態をもち、その状態遷移は、自分自身の状態とまわりの他のセルの状態によって決定される。一個のセルの状態遷移に影響を与えるセル空間範囲のことを近傍と呼ぶ。つまり、近傍内の他のセルの状態を入力として全セルが同時に有限オートマトンとして動作することにより、セルオートマトン全体の大域的状態遷移が引き起こされることになる。

本論文で主として取り扱う 1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトンは、各セルを一次元に結合し、自身の両隣までを近傍とするものであり、セルオートマトンの中で最も簡単なものである。このとき、有限オートマトンとしての各セルの振る舞いは、(1) 式の一般的定義にあてはめて表現すると、

$Q: \{0, 1\}$

$\Sigma: \text{両隣の状態の組合せ } Q \otimes Q = \{00, 01, 10, 11\}$

f : 状態遷移関数 $Q \otimes \Sigma = Q \otimes Q \otimes Q \rightarrow Q$ なる写像

$q_0: 0$ または $1 \quad q_0 \in Q$

$F: 0$ または 1 の 2 状態 $F \subseteq Q$

であるから

$$M=(Q, \Sigma, f, q_0, F)$$

$$=(Q, Q \otimes Q, Q \otimes Q \otimes Q \rightarrow Q, Q, Q) \tag{2}$$

となる。つまり、すべてが内部状態の集合 Q のみを用いて記述される。この性質は一般のセルオートマトンにおいても変わらない。

2.1.2 ルールと境界条件

状態遷移関数 f の形が具体的に与えられれば、セルオートマトンは初期状態に応じて自動的に作動することになる。1 次元 ($2r+1$) 近傍セルオートマトンにおける f は

$$\underbrace{Q \otimes Q \otimes \dots \otimes Q}_{2r+1} \xrightarrow{f} Q$$

で与えられるから、関数形として次式のように表すことができる。

$$x_i^{t+1} = f(x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \tag{3}$$

ここで、 x_i^t は位置 i のセルの時刻 t における状態を示す ($x_i \in Q$)。以後、この状態遷移関数 f のことを (遷移) ルールと呼ぶことにする。

今、セルのとり状態が 2 状態の場合、(3) 式の右辺の近傍状態 ($x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t$) の組合せは 2^{2r+1} 通りあり、その個々の場合に対して左辺の x_i^{t+1} の状態をどう設定するかで f は決定される。従って、ルールとしては $2^{2^{2r+1}}$ 種類存在することになる。

具体的には、3 ($r=1$) 近傍の場合、($x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t$) は 111 110 101 100 011 010 001 000 の 2^3 通り考えられ、遷移ルール f は $2^{2^3} = 256$ 個存在する。その中の 1 つとして例えば

$$(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) : \underline{111 \ 110 \ 101 \ 100 \ 011 \ 010 \ 001 \ 000}$$

$$x_i^{t+1} : 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

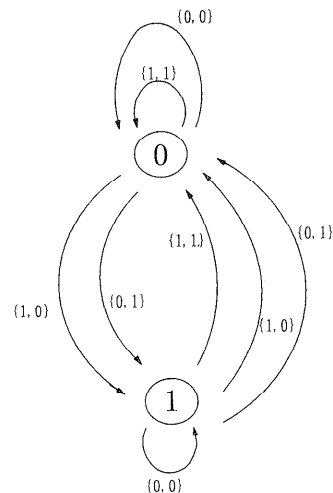


図1 2状態3近傍セルオートマトンにおけるセルの振る舞い (#22の場合)

Fig. 1 Behavior of a cell as a finite automaton in the case of one-dimensional (1-D), 2-state, 3-neighbor rule #22.

を取り上げると、有限オートマトン ((2)式) である各セルの振る舞いは図1のようになる。

また、それぞれのルールを番号で呼ぶために、 $(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$ に対する x_i^{t+1} の配列を2進数のビット列とみなし、それを10進化した数値をそのルールの番号とする⁶⁾。今の例の場合、

$$(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)_2 = (22)_{10}$$

であるから、ルール番号は#22となる。

個々のセルのルールが(3)式によって与えられても、実際の計算機実験でのセルオートマトン全体の大域的遷移ルールとしては不完全である。なぜなら、1次元セルオートマトンが有限個のセル構成を余儀なくされるため、両端付近に位置するセルの近傍が系の外に出てしまい、(3)式が適用できなくなるからである。この点を克服するためには何らかの境界条件を導入する必要がある。

可能な境界条件としては種々考えられるが、ここでは、遷移ルールのアーギュメントの一部を外部から与える必要の生じない、両端のセルが互いに連絡し合う巡回境界(サークル)条件をとることとする。この場合、セルオートマトンの時間に対する状態変化は図2のように進行する。今、全セル数を N とすると3近傍の場合、(3)式には

$$x_i^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) \tag{4}$$

$$x_{i-1}^{t+1} = f(x_{i-2}^t, x_{i-1}^t, x_i^t) \tag{5}$$

の条件が付加されることになる。ただし、以下の挙動評価では、この境界条件に特異的に現れる性質(例えば、 N に応じた周期性など)についてはその対象とはしない。

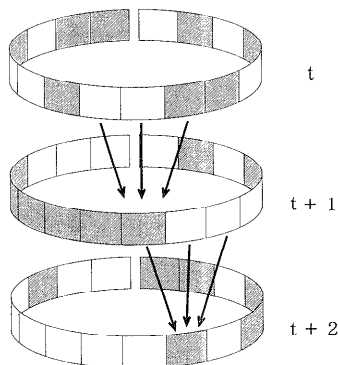


図2 巡回境界条件をもつ1次元セルオートマトンでの状態変化(#22の場合、黒部分は状態1、白部分は状態0を表す)

Fig. 2 The transition of a 1-D, 2 state, 3-neighbor cellular automaton (CA), #22, with periodic boundary condition. The configuration consists either 1 (black square) or 0 (white square).

2.2 挙動分類

セルオートマトンの時間発展は、(3)式の各セルに対する局所的ルールを空間内の全セルに同時適用することによって得られる。従って、空間全体の状態変化を直接的に決定できる大域的ルールは与えられておらず、観測される系の性質や構造は創発的に出現(emerge)したものである。局所的ルールの解析だけから先見的にその大域的な挙動傾向がわかるのは特殊な場合に限られ、大抵の場合、たとえ局所的ルールが単純でも、実際の計算実行を余儀なくされる。その際、コンピュータによるシミュレーションがこのような大自由度セル構成システムの検討には不可欠となる。

Wolfram は、2状態3近傍や2状態5近傍総和型(\vee が近傍セルの状態の和だけに依存)のルールをもつ1次元セルオートマトンの挙動パターンをコンピュータを用いて系統的に調べ、それらを以下の4つのクラスに分類した^{1),6)}。

クラス1: 時間が経つとすべてのセルの状態が0 または1に落ち着き、一様になってしまう。

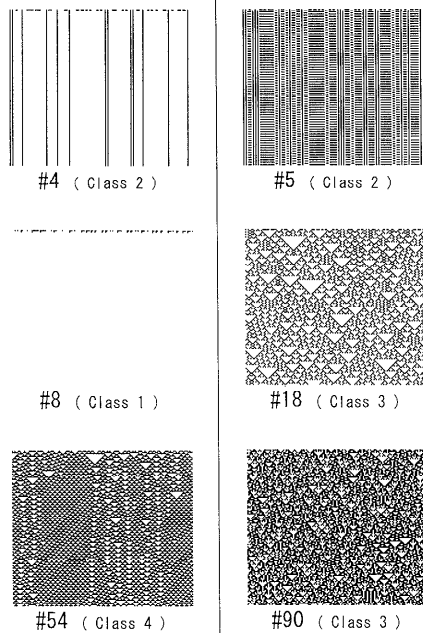


図3 1次元2状態3近傍セルオートマトンのパターン図とクラス(空間×時間=150×130)

Fig. 3 Space-time patterns and classes for $r=1$ typical rules. Array size is 150, 130 time steps from a random initial state.

クラス2:セル間の作用が遠くまで伝わらず、時間的に振動するか、時間的には一様でも空間的な縞模様に着ち着く。

クラス3:セル間の作用が遠くまで伝わり、現れてくるパターン自体は時間的にも空間的にも不規則なものとなる。

クラス4:時間的に長い遷移性をもつ複雑なパターンを作る例外的なクラスで、クラス1~3のいずれでもない。

図3は、1次元2状態3近傍セルオートマトンの振る舞いについて、横軸を空間、縦軸を時間とし、時間変化する空間パターンを2次元図として捉えたものである。空間のセル数と時間のステップ数は空間×時間=150×130とし、状態0を白、状態1を黒で表している。#8はクラス1、#4と#5はクラス2のパターン例である。残りの#18、#54、#90の3つのパターンは、いずれも不規則であるが、#18と#90に比べて#54はその不規則性にややくせがある。このことから、#18と#90はクラス3に、#54はクラス4に属するパターン例であると解釈される。

さらにWolframは、上記のクラス1~4の分類に際して力学系のアトラクタとのアナロジーを指摘している。クラス1は一様な平衡安定点(固定点)、クラス2は周期1を含む周期解(リミットサイクル)、クラス3はカオス(ストレンジアトラクタ)にそれぞれ対応し、クラス4に対応する明確な力学系は存在しない。クラス4がクラス2とクラス3の境界的存在であるとする考え^{7),8)}に立てば、クラス4は秩序的な周期解と無秩序的なカオスの臨界上に位置づけられる。

3. 挙動評価法

2.2節の現象論的分類(目によるパターン分類)を定量的に裏付けようとするこれまでの方法^{7),9)~11)}は、各セル間に何らかの評価量(スカラ量)を定義し、その平均を扱うものや、セル配列の情報を一旦スカラ化(例えばビット密度)してから時系列処理しようとするものがほとんどであった。ここでは、セル配列全体が示す大域的挙動の複雑さを直接的に評価すべく、各セルの刻々の値を成分とするベクトル

$$X(t) = (x_1^t, x_2^t, x_3^t, \dots, x_n^t) \quad (6)$$

をその基本量とする。以後、このベクトルのことを時刻 t における状態ベクトルと呼ぶことにする。

3.1 状態ベクトルによる時間自己相関

対象とする時系列データが周期的または準周期的であるかどうかを調べる場合、パワー・スペクトルを用いて分析することが多い。本論文では、このパワー・

スペクトルのフーリエ変換に相当する時間自己相関 $C(k)$ を

$$C(k) = \langle X(t) \cdot X(t+k) \rangle - \langle X(t) \rangle \cdot \langle X(t+k) \rangle \quad (7)$$

と定義し、時間 k 離れた状態ベクトル間の相関に着目することにする。ここで、“ \cdot ”はベクトルの内積を、また $\langle \rangle$ は時間平均 $\langle X(t) \rangle = 1/M \sum_{t=0}^{M-1} X(t)$ を表している。(7)式は、通常、スカラ値に対して定義される自己相関の、ベクトル値の場合への自然な拡張となっている。

この時間自己相関をグラフ化し、 k の増加にともなう $C(k)$ の変化をみることにより、周期と非周期の区別が可能になる。特に、カオスの挙動には k の増加とともに $C(k)$ が減衰するという性質が存在する¹⁴⁾。そして、この減衰の程度とそれに要する時間とから、対象が有するカオス性の強弱をある程度判定することができる。

3.2 状態ベクトルによるフラクタル次元

3.2.1 時系列グラフの長さとその粗視化

これまでの、観測した1次元(スカラ値)の時系列データを“平面を埋める線分のパターン”と考え、時系列データの動きをフラクタル次元として定量化する考えが提出されている^{15),16)}。

通常、時系列データ $X(n\Delta t)$ ($n=1, 2, \dots, T$)のグラフ化は、横軸を時間 t 、縦軸を時系列データ値として表現される。このとき、隣り合う時刻のデータ間の線分は

$$\Delta L_n(\Delta t) = \sqrt{(X((n+1)\Delta t) - X(n\Delta t))^2 + (\Delta t)^2} \quad (8)$$

で与えられるが、この場合、サンプリングタイム Δt の長さ(単位時間あたりの横軸のスケール)のとり方により t - X 平面に表される時系列の折れ線パターンの形状(複雑さ)は大きく変化する。このような不都合を取り除くためには、時系列データ間の長さを時間軸の表示の仕方に影響されない

$$\Delta L_n(\Delta t) = |X((n+1)\Delta t) - X(n\Delta t)| \quad (9)$$

の形で定義すればよい。これにより時系列データの全長(時系列長さ)は

$$L(\Delta t) = \frac{\sum_{n=0}^{T-1} |X((n+1)\Delta t) - X(n\Delta t)|}{\Delta t} \quad (10)$$

となる。 Δt で割るのは長さ Δt を基準とした値にするためである。

次に、Higuchiによる粗視化の方法¹⁶⁾について述べる。いま、時系列データ $X(t)$ を $\Delta t = k$ で粗視化し、その時系列のセットを

$$\tilde{X}_m(k); X(m), X(m+k), \dots, X(m + [\frac{T-m}{k}] \cdot k)$$

$$(m=1, 2, 3, \dots, k)$$

のように k 個用意する。ここで、 $[]$ はガウス記号を表す。それぞれの $\tilde{X}_m(k)$ に対する粗視化長さ $L_m(k)$ は、(10)式と同様

$$L_m(k) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{[\frac{T-m}{k}]} |X(m+ik) - X(m+(i-1) \cdot k)| \right) \cdot \frac{T-1}{[\frac{T-m}{k}] \cdot k} \right\} \quad (11)$$

となる。ただし、 $(T-1)/([\frac{T-m}{k}] \cdot k)$ の項は、 k で粗視化することにより生じる時系列セットのデータ数の違いを補正するためのものである。結局、 k で粗視化された時系列の長さは、(11)式の $L_m(k)$ の平均

$$\langle L(k) \rangle = \frac{\sum_{m=1}^k L_m(k)}{k} \quad (12)$$

で定義される。

3.2.2 状態ベクトルにおける粗視化長さ

データがベクトル値の場合、その時系列は一般に(超)立方体を埋める軌道のパターンとなる。特に、ここでの研究対象であるセル配列の状態ベクトル ((6)式) では、それぞれの成分は2値しかとらないので、その時系列は N 次元超立方体上の頂点の遍歴パターンとして捉えられる。この動きをフラクタル解析の対象とするためには、先に述べた時系列スカラデータに対する Higuchi の方法 ((11)式) を拡張する必要がある。そこで、状態ベクトル X と Y の間の距離 $d(X, Y)$ を

$$d(X, Y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad (13)$$

のハミング距離で定義し、時系列ベクトルデータ $X(t)$ ($t=1, 2, \dots, T$) に対する粗視化スケール k での粗視化長さを

$$\langle L(k) \rangle = \left\{ \left[\sum_{t=1}^{T-k} d(X(t), X(t+k)) \right] \cdot \frac{1}{T-k} \cdot \frac{T}{k} \right\} \quad (14)$$

とする¹²⁾。ここで $\frac{1}{T-k} \cdot \frac{T}{k}$ の項は、(11)式の場合と同様、 k での粗視化で生じる時系列データ数の違いを補正するためのものである。

3.2.3 フラクタル解析とフラクタル次元

$X(t)$ に対して粗視化スケール k を変えることで、各粗視化レベルに応じた粗視化長さ $\langle L(k) \rangle$ を(14)式を用いて計算する。 $\log \langle L(k) \rangle$ と $\log k$ の間に直線性が存在すれば、その傾きを $-D$ とおくと両者の関

係は

$$\langle L(k) \rangle \propto k^{-D} \quad (15)$$

となる。このとき $X(t)$ はフラクタル性をもち、そのフラクタル次元は D で与えられる。

状態ベクトル間の距離の時間変化は線(軌道)に過ぎないため、普通の意味での次元は1である。ところが、ここでのフラクタル次元 D は、 N 次元超立方体上の頂点をどのように遍歴するかを反映していることから、 $D \geq 1$ の値をとり得る。時系列変化が単純な場合にはフラクタル次元は1に近く、複雑さを増すにつれてその値は大きくなる。具体的には、 $X(t)$ が直線的に変化する(少しずつ一定速度で離れていく)とき、 $d(X(t), X(t+k)) \sim k$ で $D=1$ となり、 $X(t)$ がランダムに変化するときには、 $d(X(t), X(t+k)) \sim$ 定数で $D=2$ となる。

時系列がフラクタル性をもつと仮定するためには、 $(\log k, \log \langle L(k) \rangle)$ の相関係数はほとんど1.0に近くなくてはならない¹⁶⁾。そこで、 $\log k$ vs. $\log \langle L(k) \rangle$ に最小二乗法により直線をフィットさせる際には、相関係数は0.999以上になることを要求し、全体に対して強引に一直線をあてはめることは避けた。また、時系列データ数 T に対して k の最大値は $T/10 \sim T/20$ 程度が適当と思われるので、実際の解析では $T=1000$ に対して $k_{\max}=100$ とした。

4. 挙動複雑性の具体的評価

4.1 3近傍セルオートマトンの挙動評価

3近傍($r=1$)の場合、ルール数は $2^8=256$ 個あるが、左右および(0 \leftrightarrow 1)の置き換えで互いに一致するものを同一視すると、独立なルール数は88個となる。このうち $X(t)$ が短時間で固定(一定)または周期状態に落ち着く秩序的なもの(クラス1, 2)を除くと、検討対象としては $X(t)$ の非周期状態が続く17ルール(#18, #22, #26, #30, #45, #54, #60, #73, #90, #105, #106, #110, #122, #126, #146, #150, #154)となる¹⁷⁾。

本研究では、この17ルールすべてに対して時間自己相関とフラクタルの解析を行い、それぞれの挙動を評価した。計算機実験では、セル配列のセル数((6)式の状態ベクトルの成分数)は $N=200$ とし、時系列としては $T=1000$ まで観測した。解析により、これまでクラス4の候補とされてきた#54と#110に対して、他のクラス3に属するルールとは全く違う結果が得られた。また、LiとPackard¹⁷⁾がクラス分類の再吟味により指摘した局所カオス的な性質をもつルール(#26, #73, #154)についても、その特徴を捉えることができた。以下では、図4に示す#22, #54, #90, #110の4つ

の場合を取り上げ、その結果を具体的に評価する。

4.1.1 時間自己相関図

図4の4つのパターンについて、縦軸に(7)式の時間自己相関を $C(0)$ で規格化した $C(k)/C(0)$ をとり、

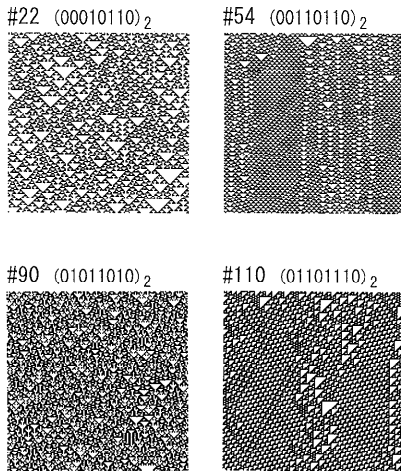


図4 1次元2状態3近傍セルオートマトンの時空間パターン図 (#22と#90はクラス3、#54と#110はクラス4、空間×時間=150×150)

Fig. 4 Space-time patterns for $r=1$ rules. Array size is 150, 150 times steps from a random initial state. Class 3: rules #22 and #90; Class 4: rules #54 and #110.

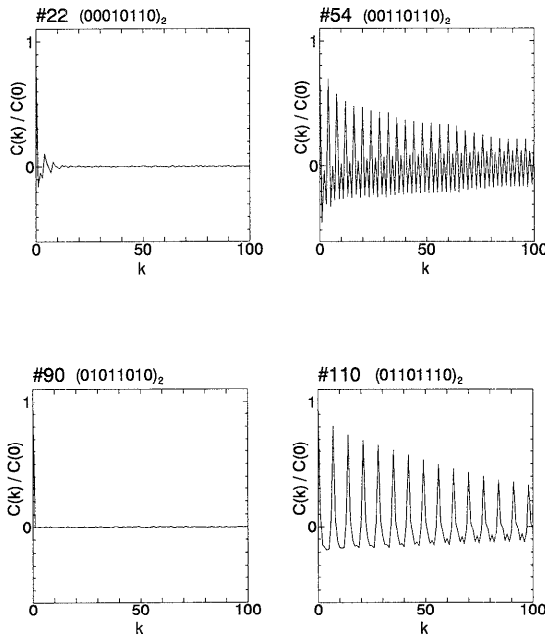


図5 #22、#54、#90、#110の時間自己相関

Fig. 5 Autocorrelation functions for $r=1$ rules #22, #90, #54 and #110. The normalized $C(k)/C(0)$ defined by Eq. (7) for the time series vector $X(t)$ is given as a function of time interval k .

時間間隔 k との関係グラフ化したものが図5である。一般に、時間間隔 k の増加に応じて相関が減少する性質は、カオス系に見られる特徴の1つであり¹⁴⁾、その意味では#22、#54、#90、#110の挙動はいずれもカオス的である。

ただ、一口にカオス的と言ってもルールにより特性に違いがあることは、図5のグラフの形状から明らかである。特にクラス3に属する#22、#90とクラス4と目される#54、#110とは大きな違いがある。

4.1.2 フラクタル解析

図6は、(14)式の粗視化長さ $\langle L(k) \rangle$ と粗視化スケール k の関係を両対数グラフ化したものである。#22と#90では、一本の直線で全データ点にフィット(相関係数は0.999以上)させることができ、フラクタル次元としてはそれぞれ $D=2.02, 2.01$ を得る。一方、#54と#110では、一本の直線で全データ点をカバーすることはできないが、複数の直線を認めると0.999以上の相関係数でフィットは可能である。#54の場合は、3本の直線が必要とされ、そのうち2本は $D=2.05$ を、残りの1本は $D=1.75$ を与える。#110の場合も同様に最低2本の直線が必要であり、一方は $D=2.02$ を、もう一方は $D=1.55$ となる。

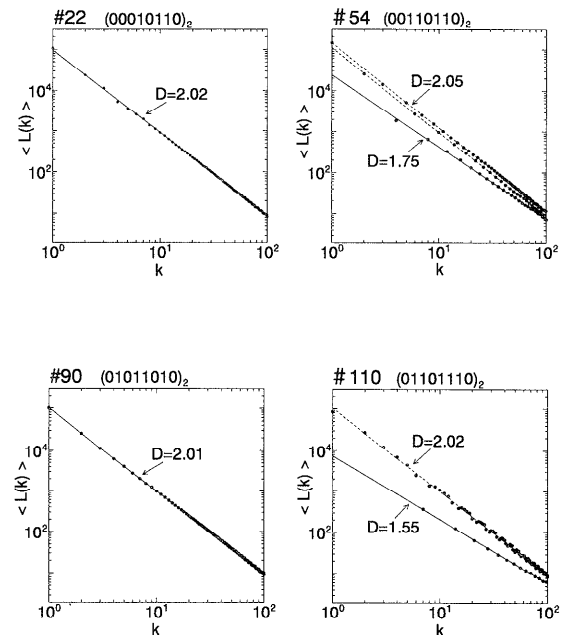
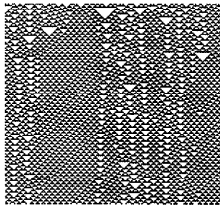


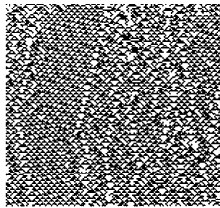
図6 #22、#54、#90、#110のフラクタル解析

Fig. 6 Fractal analyses for $r=1$ rules #22, #90, #54 and #110. The logarithm of the length $\langle L(k) \rangle$ (defined by Eq. (14)) for the time series vector $X(t)$ is given as a function of $\log k$. The straight line is fitted to the points by least-square method and the absolute value of the slope represents the fractal dimension D .

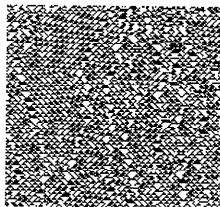
Series 1 (D=2.05)



k = 1

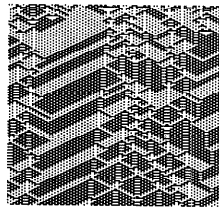


k = 5

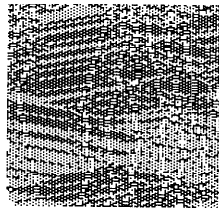


k = 9

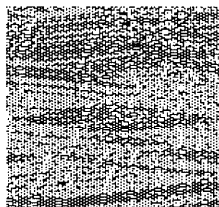
Series 2 (D=2.05)



k = 2

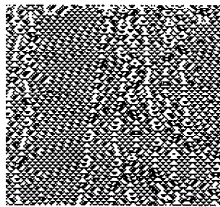


k = 6

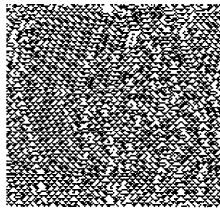


k = 10

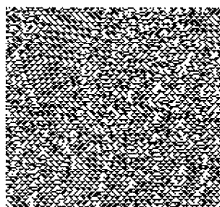
Series 3 (D=2.05)



k = 3

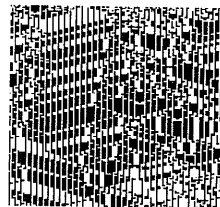


k = 7

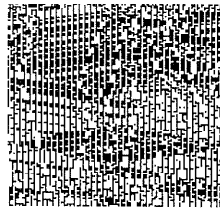


k = 11

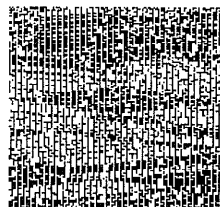
Series 4 (D=1.75)



k = 4



k = 8



k = 12

図7 #54の系列別時間粗視化パターン図(空間×粗視化時間ステップ数=150×140)

Fig. 7 Series structures observed by time interval k in rule #54. Each picture shows every k -th array in time. Series $r : k=r+4m (r=1\sim 4 ; m=0, 1, 2, \dots)$.

フラクタル次元は、本来、時間の粗視化スケール k に対してローカルに定義されるものである。ところが、#54と#110の結果は、 k に対する大域的な異構造の存在を示しており、時系列データのもつ複雑さの非一様性を反映するものと解釈される。

4.1.3 粗視化時間構造

#54のフラクタル解析(図6の#54)において $D=1.75$ の直線を構成するプロット点の粗視化スケール k は、 $k=4, 8, 12, \dots$ という間隔4ごとの数列であることがわかる。同様に、 $D=2.05$ の直線の一方も $k=2, 6, 10, \dots$ という間隔4の数列となっている。さらに、 $D=2.05$ の残りの1本について細かく分析した結果、厳密には2本に分離していることが判明した。結局、#54には

$$\text{系列 } r : k=r+4m$$

$$(r=1, 2, 3, 4 ; m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

なる mod 4 の1つの系列の大域的な時間構造が確認できた。この構造のことを以後、粗視化時間構造と呼ぶことにする。

上記の各系列ごとに、実際の粗視化パターンを図示したのが図7である。粗視化は、通常の時系列 ($k=1$ のときに対応) から k ステップごとに $X(t)$ を抽出して構成される。例えば、図中の $k=10$ の場合、最後の140ステップ目の配列は $t=1400$ における状態ベクトル $X(1400)$ である。 $D=2.05$ の系列1, 2, 3は、粗視化が進むとともにパターンは乱雑化してゆくが、 $D=1.75$ の系列4はほぼ一定の複雑度を保ち、その劣化はゆるやかである。また、図6(#54)においてほぼ一直線上に重なっていた系列1と系列3は、粗視化とともにきわめて類似したパターンになることも確認できる。

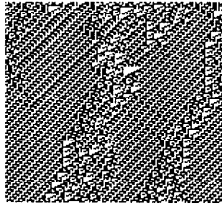
#110についても、#54と同様の分析を経て

$$\text{系列 } r : k=r+7m$$

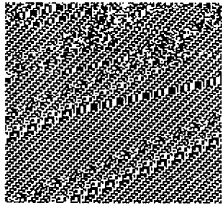
$$(r=1, 2, \dots, 7 ; m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

の mod 7 の7系列の存在が確認できた。図6(#110)での $D=2.02$ の点線部分は mod 7の6系列のデータ群であったわけである。図8には、 $D=2.02$ を与える系列1~6の代表としての系列2と、 $D=1.55$ の系列7の

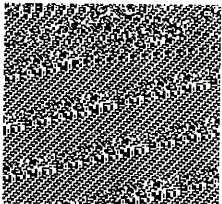
Series 2 (D=2.02)



k = 2

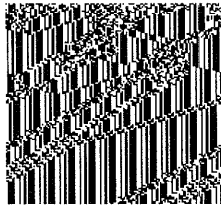


k = 9

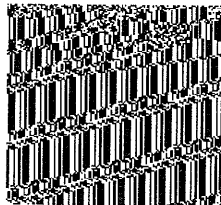


k = 16

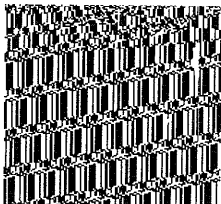
Series 7 (D=1.55)



k = 7



k = 14



k = 21

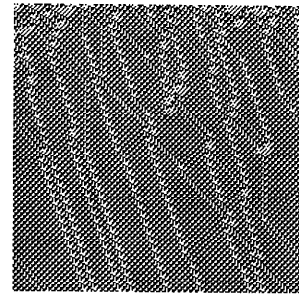


図9 1次元2状態5近傍セルオートマトンの時空間パターン図例 (空間 × 時間 = 200 × 200)

Fig. 9 Space-time pattern for $r=2$ rule # 2787375042. Array size is 200, 200 time steps from a random initial state.

図8 #110の系列別時間粗視化パターン図 (空間 × 粗視化時間ステップ数 = 150 × 140)

Fig. 8 Series structures observed by time interval k in rule # 110. Series $r: k=r+7m (r=1\sim 7; m=0, 1, 2, \dots)$. Two of seven series are shown.

2系列の時間粗視化パターンを示した。#54の場合と同様、粗視化が進んでも系列7は、系列2に対比して単純な構造を維持しているのがわかる。

4.2 5近傍セルオートマトンの場合

1次元2状態3($r=1$)近傍セルオートマトンの挙動評価を通して、クラス4と目されるルールが示す長遷移性の複雑挙動の背景には、異なるフラクタル次元をもつ粗視化時間構造の多重存在が明らかとなった。ここでは、さらに自由度の高い1次元2状態5($r=2$)近傍セルオートマトンに対して挙動評価を試みる。

5近傍の場合、近傍状態の組合せは $2^{2r+1}=2^5$ 通りあるので、(3)式のルールは $2^{25}=2^{32}$ 個存在する。3近傍の場合の256個に比べて 2^{32} 個という数は膨大であり、全ルールに対するクラス分類もこれまでに一度も行われていない。そこで、解析対象のルール抽出の指針として、我々はLangtonら^{8),17)}が提言するルール活性パラメータ λ に着目する。この λ は(3)式の(遷移)ルールから

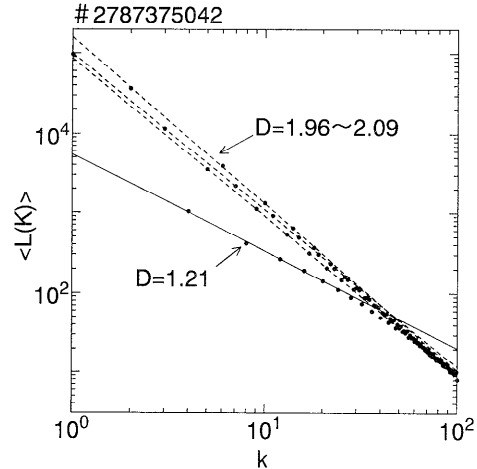


図10 1次元2状態5近傍セルオートマトンのフラクタル解析
Fig. 10 Fractal analysis for $r=2$ rule # 2787375042.

$$\lambda = \frac{x_i^{t+1}=1 \text{ を与える } (x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \text{ の数}}{(x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \text{ の総数}} \quad (16)$$

によって定義される。 $\lambda=1/2$ 付近をもつルールは活性度が高く、クラス3, 4に属するものが多いというのが彼らの主張である。(ちなみに3近傍の場合には、#54が $\lambda=4/8=0.5$ 、#110が $\lambda=6/8=0.75$ である。)

実験では、11111~00000の32個の5近傍状態に対して0または1を1/2の確率で発生させ、 $\lambda=0.5$ をもつルールを選択的に解析した。その中の代表例として、以下では $\lambda=17/32=0.53$ のルール(1010011000100011111101111000010)₂ = # 2787375042の場合について分析する。実際の挙動パターンは図9のようになり、時間的に長い遷移性をもつ複雑なパターンを示している。

フラクタル解析の結果を示したのが図10である。フラクタル次元の異なる4つの系列

$$\text{系列 } r: k=r+4m$$

($r=1, 2, 3, 4$; $m=0, 1, 2, 3, \dots$)

の存在が確認できる。 $D=1.21$ の系列 4 の粗視化時間構造が $D=1.96\sim 2.09$ の他の 3 系列よりもかなり単純であることは、先の 3 近傍の場合と同様に、実際の系列別の時間粗視化パターンによっても裏付けられている。ただ、系列 4 のデータ点すべてを一直線上にフィットさせることはできず、 $D=1.21$ は $k=4, 8, 12, 16, 20$ の 5 つのデータ点によるローカルな値である。 $k=24$ 以降、データ点列の傾きは徐々に急となり、ついには他の系列と同じ傾きになる。このような傾向は、他の 5 近傍ルール ($\lambda=0.5$) の場合にも共通して観測された。この原因は、近傍数の増加 (3→5) による周囲への影響伝搬の速度上昇が、時間発展にともなう非秩序化の進行を加速するためであると考えられる。

5. おわりに

セルの全配列から成る状態ベクトルに対して時系列フラクタル解析を行うことにより、クラス 1, 2 (秩序相) とクラス 3 (カオス相) の中間に位置するクラス 4 の特徴を定量的に捉えることができた。すなわち、時間的に長い遷移性をもつクラス 4 は、フラクタル次元が大きく異なる粗視化時間構造の重ね合せ状態であることが明らかとなった。その意味で、この解析法は、カオス的なクラス 3 とその辺縁に位置するクラス 4 を判別する指標として十分有効である。このような時間構造の性質は、ルール間の適当な時間的組合せで出現するものではないことを付言しておく。実際、我々は 3 近傍セルオートマトンの場合に、クラス 3 に属するルール (例えば #90) の時間発展に対して一定の時間周期でクラス 2 のルール (例えば #132) を介入させてみた。いろいろな組合せを実行する中でクラス 4 的パターンが観測されたが、それに時系列フラクタル解析を適用しても、いずれの場合もフラクタル次元の違う異構性は存在しなかった。

本論文では、セル配列のサイズが $N=200$ の場合の解析結果のみを示したが、全く同様の結果は $N=500$ の場合にも得られている。ここでの解析に際して留意すべき条件は、状態ベクトル $X(t)$ の取り得る状態数が観測時間よりも十分に大きい、すなわち、 $O(2^N) \gg O(T) \sim 10^3$ ということである。 $N=200$ において既に $O(2^{200}) \sim 10^{60}$ であるから、サイズスケールとしては十分であり、これ以上の N を採っても結果は変わらないものと考えられる。

最後に、本論文で述べた解析方法は、セルの取り得る状態が任意の離散値および連続値の場合にも適用可能であり、今後、ニューラルネットワーク等を含む広

い範囲でのセル構成システムの挙動評価へも利用を検討してゆきたい。また、Wolfram のクラス分類に関する判定基準の数学的定式化を試みる研究¹⁸⁾⁻²⁰⁾ や一般化シフト写像の考え²¹⁾ に基づいてクラス 4 に対応する力学系を捉えようとする研究^{22), 23)} も行われており、ここでの解析法の有効性の根拠に関するこれらの方向からの検討も今後の課題の 1 つであると考えられる。

参考文献

- 1) Wolfram, S. ed.: *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1986).
 - 2) Gutowitz, H. ed.: *Cellular Automata: Theory and Experiment*, North-Holland (1990).
 - 3) Ruthen, R.: 広がる複雑適応系の研究, 日経サイエンス, 3月号, pp. 104-113 (1993).
 - 4) Packard, N.: Adaptation toward the Edge of Chaos, Kelso, J. A. S., Mandell, A. J. and Shlesinger, M. F. eds., *Dynamic Patterns in Complex Systems*, pp. 293-301, World Scientific (1988).
 - 5) Langton, C. G. ed.: *Artificial Life II*, pp. 41-91, Addison-Wesley (1991).
 - 6) Wolfram, S.: Universality and Complexity in Cellular Automata, *Physica*, Vol. D10, pp. 1-35 (1984).
 - 7) Li, W., Packard, N. and Langton, G.: Transition Phenomena in Cellular Automata Rule Space, *Physica*, Vol. D45, pp. 77-94 (1990).
 - 8) Langton, C. G.: Computation at the Edge of Chaos: Phase Transitions and Emergent Computation, *Physica*, Vol. D42, pp. 12-37 (1990).
 - 9) Grassberger, P.: Chaos and Diffusion in Deterministic Cellular Automata, *Physica*, Vol. D10, pp. 52-58 (1984).
 - 10) 高橋 智: セルオートマトンにおけるカオスとフラクタル, 合原一幸編著, カオス, pp. 258-288, サイエンス社 (1990).
 - 11) Kayama, Y., Tabuse, M., Nishimura, H. and Horiguchi, T.: Characteristic Parameters and Classification of One-dimensional Cellular Automata, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 3, No. 6, pp. 651-665 (1993).
 - 12) 西村治彦, 新地辰朗: 時系列解析による一次元セルオートマトンのパターン複雑性評価, 第 47 回情報処理学会全国大会論文集 (1), pp. 71-72 (1993).
 - 13) 足立暁生: 情報科学の基礎, 東京電機大学出版局 (1990).
 - 14) ベルジェ, P., ポモウ, Y., ビダル, Ch. (相澤洋二訳): カオスの中の秩序, pp. 102-147, 産業図書 (1992).
- 長島弘幸, 馬場良和: カオス入門—現象の解析と

数理一, 培風館 (1992).

- 15) Burlaga, L. F. and Klein, L. W.: Fractal Structure of the Interplanetary Magnetic Field, *J. Geophys. Res.*, Vol. 91, pp. 347-350 (1986).
- 16) Higuchi, T.: Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory, *Physica*, Vol. D31, pp. 277-283 (1988).
樋口知之: 時系列のフラクタル解析, 統計数理, Vol. 32, No. 2, pp. 209-233 (1989).
- 17) Li, W. and Packard, N.: The Structure of the Elementary Cellular Automata Rule Space, *Complex Systems*, Vol. 4, pp. 281-297 (1990).
- 18) Culik, K., II and Yu, S.: Undecidability of CA Classification Schemes, *Complex Systems 2*, pp. 177-190 (1988).
- 19) Sutner, K.: Classifying Circular Cellular Automata, *Physica*, Vol. D45, pp. 386 - 395 (1990).
- 20) Ishii, S.: Measure Theoretic Approach to the Classification of Cellular Automata, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 39, pp. 125 - 136 (1992).
- 21) Moore, C.: Generalized Shift: Unpredictability and Undecidability in Dynamical Systems, *Nonlinearity*, Vol. 4, pp. 199 - 230 (1991).
- 22) 吉川敏文, 合原一幸, 伊東 晋, 宇都宮敏男: 一般化シフト写像のダイナミクスの解析, 京大数理解析研講究録 814, pp. 145-161 (1992).
- 23) 合原一幸, 吉川敏文: 秩序・カオス系と情報処理, 人工知能学会誌, Vol. 8, No. 2, pp. 179-183 (1993).

(平成 6 年 3 月 28 日受付)

(平成 7 年 2 月 10 日採録)



西村 治彦 (正会員)

1980 年静岡大学理学部物理学科卒業。1985 年神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了。1989 年広島大学医学部(医療情報学)助手。1990 年 12 月より兵庫教育大学(情報科学)助教授, 現在に至る。学術博士。これまでファジー・データベース, ニューラルネットワーク, セルオートマトン, 複雑系の科学等の研究に従事。日本神経回路学会, 日本物理学会, 電子情報通信学会等, 各会員。



新地 辰朗 (正会員)

1963 年生。1986 年鹿児島大学工学部電気工学科卒業。1994 年兵庫教育大学大学院学校教育研究科(情報科学研究室)修了。修士(学校教育学)。現在, 鹿児島県立種子島実業高等学校電気科教諭。これまでセルオートマトン, カオス系シミュレーション等の研究に従事。日本産業技術教育学会会員。