

## 非線形性を考慮したモード解析—従来手法との比較—

藤井 祐司<sup>†</sup> 吉田 典正<sup>†</sup> 神田 亮<sup>†</sup> 新谷 幹夫<sup>‡</sup>日本大学<sup>†</sup>東邦大学<sup>‡</sup>

## 1. はじめに

モード解析は、振動工学や構造力学の分野で用いられる手法であり、物体の振動を物体自身が持つ固有の振動に分解し、応答を解析する手法である。また、実際の座標系(以下、実座標系)での振動を互いに独立な 1 自由度の座標系(以下、モード座標系)の振動系に分解できる。CG では、次式で力を計算するバネ・質点モデルが広く用いられている。

$$\mathbf{f}_i = \sum_j k_{ij} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} (|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| - l_{ij}) \quad (1)$$

ここで  $k_{ij}$ ,  $l_{ij}$  は質点  $i, j$  間のバネ定数と自然長とする。式(1)はバネの変位に対して幾何学的に非線形なので、変形とともに剛性マトリックスは変化し続ける。従って、モード解析は微小変形に対してのみ利用されることが多い。

本研究では、式(1)によるバネ・質点モデルに対してモード解析を適用することを考える。具体的には、剛性マトリックスを線形近似する手法<sup>[1]</sup>と、剛性マトリックスの非線形性を考慮する手法<sup>[2]</sup>の比較を行う。

## 2. モード解析

モード解析<sup>[3]</sup>は、対象とする物体の振動を物体自身の持つ固有の単純な振動に分解し、足し合わせることで応答を解析する。この固有の振動の動きは、次に示す一般固有値問題から求められる固有ベクトル $\{\mathbf{u}\}$ に相当する。ここで $[m]$ は実座標系における質量行列で、 $[k]$ は剛性マトリックスを表し、 $\omega$ は固有値を表す。

$$\omega^2 [m] \{\mathbf{u}\} = [k] \{\mathbf{u}\} \quad (1)$$

固有ベクトルを列成分とした行列 $[\phi]$ の転置行列を振動方程式の各項に左から乗じることによって座標変換を行う。次に実座標系からモード座標系に変換する式を示す。ここで $[c]$ は減衰行列で、

$\{\mathbf{f}\}$ は外力、 $\{\mathbf{x}\}$ は変位を表し、ドットは時間による微分を示す。

$$\begin{aligned} [\phi]^T [m] \ddot{\mathbf{x}} + [\phi]^T [c] \dot{\mathbf{x}} + [\phi]^T [k] \mathbf{x} &= [\phi]^T \{\mathbf{f}\} \\ [M] \ddot{\mathbf{X}} + [C] \dot{\mathbf{X}} + [K] \mathbf{X} &= \{\mathbf{F}\} \end{aligned} \quad (2)$$

以降、アルファベットの小文字は実座標系を表し、大文字はモード座標系を表す。

本研究で使用する剛性マトリックスは、バネによる位置エネルギーの式を、変位で 2 階偏微分することにより得られる。

モード解析は微小変形する物体に対して行うので、剛性マトリックスが変位に対して線形であると仮定して、初期状態の剛性マトリックスで線形近似する。

## 3. 非線形な剛性マトリックスに対するモード解析

対象とするモデルの変形が大きくなるほど剛性マトリックスは線形として扱えなくなり、力が変位に対して幾何学的非線形になる。本研究では、従来手法である O'Brien の手法<sup>[1]</sup>と非線形性を考慮する我々の提案手法<sup>[2]</sup>を比較する。

O'Brien の手法は系の剛性を初期状態の剛性マトリックスで単純な線形近似を行い、力をモード座標系で計算する。

我々の提案手法は、変位を実座標系に変換し力を計算する。その後計算された力をモード座標系に変換することで、バネの非線形性を考慮する。以下にその順序を示す。

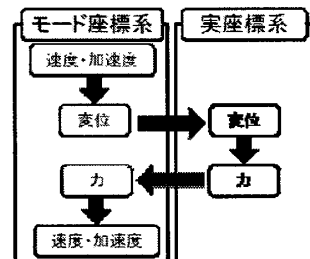


図 1 計算の順序

本研究は、モード解析を適用しない場合に対し、提案手法と従来手法を同じ個数の振動系を用いて比較する。

「Consideration of Nonlinearity in Modal Analysis and its Effect」

<sup>†</sup>Yuji FUJII · Nihon University

<sup>†</sup>Norimasa YOSHIDA · Nihon University

<sup>†</sup>Makoto KANDA · Nihon University

<sup>‡</sup>Mikio SINNYA · Toho University

#### 4. 実行結果

シミュレーションでは、隣接する質点をバネで接続して最上部の質点を固定したバネ-質点モデルを使用し、固有値の小さい方から4個に対応する振動系を使用してシミュレーションを行った。なお、縦と横のバネのバネ定数は100、斜めのバネのバネ定数は90、各質点の質量は0.2とし、外力は重力のみとする。

図2に、シミュレーションの様子を示す。従来手法に比べて非線形性を考慮する手法は、振動系4個だけでモード解析を適用しない場合に対して動きが近いことがわかる。

図3にモード解析を適用しない場合に対して、従来手法と非線形性を考慮する手法で各質点間のRMSを比較した結果である。なお、物体の大きさは縦横ともに1になるように正規化を行った。従来手法は提案手法に対して誤差の幅が大きいことがわかる。

図4は同じパラメータで質点数を増やした時の1ステップの計算時間の比較結果を示す。モード解析を適用しない場合と比べると、従来手法と提案手法の差はあまり無いことがわかる。

以上から提案手法は、モード解析を適用しない場合と比べて計算時間は少ない事、従来手法より

誤差が少なく、シミュレーションの動きがモード解析を適用しない場合に近いことがわかる。

#### 5. まとめ

本研究では、バネ-質点モデルにモード解析を適用してシミュレーションを行う際に、剛性マトリックスの非線形性を考慮するための手法と従来手法と比較した。その結果、非線形性を考慮する手法はモード解析を適用しない場合より計算時間は少なく、シミュレーションの動きがモード解析を適用しない場合に近いことが確認された。

今後の課題として、大変形を伴うシミュレーション、3次元での振動の分解という問題があげられる。

#### 参考文献

- [1] O'Brien, J.F., C. Shen, and C. M. Gatchalian, "Synthesizing Sounds from Rigid-Body Simulations", Symposium on Computer Animation, pp. 175-181, July 2002.
- [2] H. Kobayashi, N. Yoshida, M. Kanda, "Two dimensional animation using mass-spring systems based on modal analysis", Image Electronics and Visual Computing Workshop, 1P-10, 2007.
- [3] 長松昭男, モード解析入門, コロナ社, 2004.

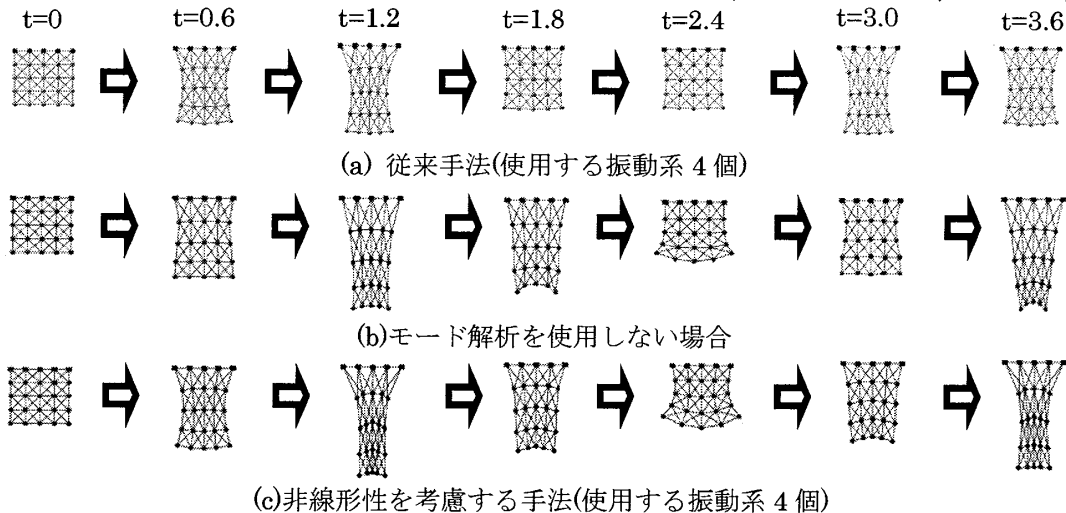


図2 シミュレーション結果

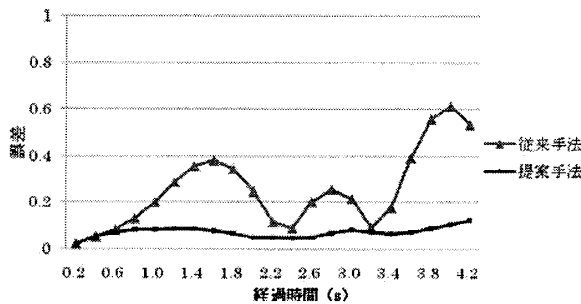


図3 誤差の比較

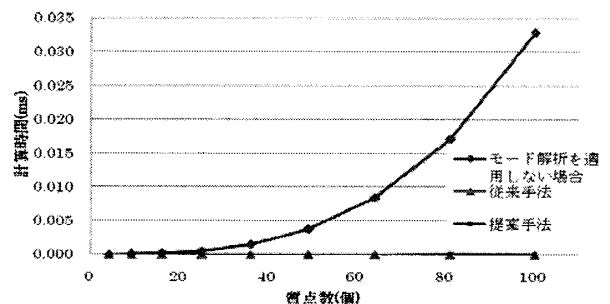


図4 計算時間の比較