広義 Hebb 則で現れる現象の考察

一色智裕† 志村知洋†
† 株式会社とめ研究所 東京ラボ

1 はじめに

近年、複雑系の研究が盛んに行われている。その中でも複雑ネットワークと呼ばれるものの研究があり、社会科学や経済学など多くの分野での研究対象となっている。実際、現実にあるネットワーク、例えばインターネット、タンパク質の相互作用、友達関係、電話回線網など数多く挙げられ、これらは非常に複雑であると考えられている。また、単純に複雑なだけではなく、ネットワークの規則性や様々な機能が背後に存在があり、その事実に対する理解が近年の研究により深まってきている。これらの複雑なネットワークを「複雑ネットワーク」、「複雑系ネットワーク」と総称されている。複雑系ネットワークの 1 例として、伝染病に関するものもがある。近年流行する伝染病は、ウィルスの進化のみならず感染経路のネットワークという意味でも複雑になっている。2002 年〜2003 年の冬に起こった SARS の世界的発生について見てみると、中国南部の広東省で流行が発生したと言われている。最初のうちは、街や家庭の中でじわじわと広がっていたと予想されるものが、広東省に隣接する国際都市である香港に届くと、それからわずか 2 週間で広東省から遠く離れた北京や海外のシンガポール・カナダ・ベトナムへと一挙に拡大した。飛行機や高速鉄道のためであるが、現実には非常に複雑な動きをしていることがわかる 。SARS については数理的な研究 [1] も行われている。これの研究のキーワードとして「スケールフリー」や「スモールワールド [2]」があげられる。どちらのキーワードも数多くの研究分野の研究結果に登場しており、複雑系ネットワークの核となるものである。

更に、もっとも身近な複雑系ネットワークとして脳があげられる。脳は個々のニューロンでは行えないたくさんのニューロンによる相互作用により高度な機能を持っている。我々のもっとも身近にもっとも興味深い研究対象がある訳である。このように、個体がどのようなネットワークで相互作用する、ネットワーク全体としてどのような振る舞いをするのかという問題が、非常に幅広い分野の多くの研究者を惹きつけている。

複雑系ネットワークである脳をモデル化したものがニューラルネットワークである。そのモデルの 1 つに自己連想記憶モデルがあり、自己連想記憶モデルの中の 1 つに Hopfield モデルがある。本研究ではこの Hopfield モデルにも用いられる Hebb 則を広義的に考え、そのアイディアをベースに一つの式を提案し、その式を介して現れる「スケールフリー」、「スモールワールド」について議論していく。また、複雑系のキーワードの一つに「カオス」があるが、本研究の提案式からも「カオス」が現れる。この「カオス」についても議論していく。

2 一般化された Hebb 則

N 個のニューロンからなるネットワークに p 個のパターンを記憶させその中の 1 つのパターンを想起させる一般化された Hebb 則

$$J_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{\mu}^{p}\xi_i^{\mu}\xi_j^{\mu} \tag{1}$$

となる。ここで ξ_i^{μ}、ξ_j^{μ} は直交パターンとする。

3 広義 Hebb 則に基づく提案式

一般化された Hebb 則の学習パターンを拡張するために直交パターンを含む任意パターンを考え、以下のような式を提案する。

$$f(\xi) = \xi_i \cdot \xi' + \xi_j \cdot \xi' - \theta \tag{2}$$

ここで ξ_i, ξ', ξ_j は任意ベクトルとし、内積をとる。また、θ は閾値とする。

4 提案式の特性

4.1 スケールフリーとスモールワールドの導出

(2) 式におけるパラメータをそれぞれ以下とする。

$$\xi_i \cdot \xi' = P(x_1) \quad ,\xi_j \cdot \xi' = P(x_2) \tag{3}$$

ここで、$P(x_1)$,$P(x_2)$ は確率ベクトルとする。
これらを (2) 式に代入すると

$$f(\xi) = P(x_1) + P(x_2) - \theta \tag{4}$$

となる。
さらに

$$f(\xi) \geqq 0 \tag{5}$$

Consideration for Phenomena of Extensive Hebbian theory
† Tomohiro Isshiki:Tomelab of Tokyo, Inc
† Tomohiro Shimura:Tomelab of Tokyo, Inc

の時にパスを張るというルール ($P(x_1)$,$P(x_2)$ は任意の頂点に対応) のグラフと考えると、(4) 式は閾値グラフ [3] と呼ばれ、これをネットワークを形成するとグラフの条件によりスモールワールドネットワークおよびスケールフリーネットワークとなる [4]。

4.2 カオスの導出

(2) 式におけるパラメータをそれぞれ以下とする。

$$\xi_i = a, \xi' = x_n \quad , \xi_j = -ax_n \tag{6}$$

また、

$f(\xi) = x_{n+1}, \theta = 0$ とする。これらを (2) 式に代入し、差分方程式を考えると

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \tag{7}$$

となる。

(7) 式はロジスティック写像であり、カオスを生成する写像を表す。

5 まとめと考察

本研究は従来の Hebb 則を拡張し、一般化した。その結果従来より各々研究されているいくつかの興味深い性質が現れることを示した。提案式をネットワークの形成則として用いると、ある条件下で、そのネットワークは「スケールフリーネットワーク」および「スモールワールドネットワーク」となる。別の条件下で差分方程式として考えると「カオス」が現れる。Hebb 則をベースに多くの事象を表すことの出来る任意ベクトルという概念を用いた提案式は、「スケールフリー」、「スモールワールド」と「カオス」は同一の対象において、条件や観察方法などの違いにより矛盾なく現れうることを示唆するものである。また、このように同一の現象の異なる振舞いを考えるためには、視野を広げ、別の角度から見ることも時として重要であることも示唆していると考えられる。また、ネットワーク形成則に用いた時、提案式の振る舞いは、入出力装置に例えるなら、装置内部のシステムの振る舞いと見ることが出来る。これを現実の脳のメカニズムにおいて考えると、実際実験などで観測されているカオスは特異点解消時に現れる現象であるとも考えられる。

今後の課題としては、ニューラルネットへの適用はもちろんのこと、その他任意ベクトルで表現できる具体的な様々な現象をモデル化した研究や、本研究の提案式から現れたグラフのトポロジーの研究など多くのことが挙げられる。

参考文献

[1] N. Masuda, N. Konno, K. Aihara. *Transmission of severe acute respiratory syndrome in dynamical small-world networks.* **Physical Review E**, 69, 031917 (2004).

[2] DJ WATTS, SH STROGATZ *Collective dynamics of 'small-world' networks.* **Nature(London)** 393:66846684, 440-442, Nature Publishing, 1998.

[3] N. Masuda, H. Miwa, N. Konno. *Analysis of scale-free networks based on a threshold graph with intrinsic vertex weights.* **Physical Review E**, 70, 036124 (2004).

[4] N. Masuda, H. Miwa, N. Konno. *Geographical threshold graphs with small-world and scale-free properties.* **Physical Review E**, 71, 036108 (2005).