焦げたパンケーキグラフにおける耐故障経路選択アルゴリズム

岩崎 達矢, 金子 敬一
東京農工大学大学院工学府

1. はじめに

今日, 並列分散計算に関する研究がより重要になっており, 近年, 特に, 超並列計算機が熱心に研究されている. これに伴い, 相互結合網として, ケイリーグラフ [1] やこれから派生する多くの複雑な位相が提案されている.

n-焦げたパンケーキグラフ B_n[5] は, そのような相互結合網の 1 つである. 小さな直径や次数に比べ, 非常に多くの節点を接続することができ有望であり, 様々な研究が行われている. その研究の 1 つに, 耐故障性に関する研究がある [3, 4]. 多くの節点を含む相互結合網において, ある程度の多重故障を許容するアルゴリズムは, 並列分散計算機の安定した運用に繋がる.

本研究では, B_n において複数の故障節点を回避した経路を構成する, 耐故障経路選択アルゴリズム FT を提案し, 評価する.

2. 焦げたパンケーキグラフ B_n

本節では, 諸定義と共に B_n の構成とその特徴を示す.

定義 1 1 から n の n 個の整数からなる符号付き順列 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ と整数 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して, 符号付前置反転操作 $\boldsymbol{u}^{(i)}$ を以下で定義する:

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = (-u_i, -u_{i-1}, \ldots, -u_2, -u_1, u_{i+1}, \ldots, u_n).$$

以下, 本稿では, スペースの節約のため, $-i$ を $\underline{i}$, $(\boldsymbol{u}^{(i,\ldots,j)})^{(k)}$ を $\boldsymbol{u}^{(i,\ldots,j,k)}$ と表記する.

定義 2 B_n は, $n! \times 2^n$ 個の節点を持つ. 各節点は, 異なる n 個の符号付き整数の順列で表される. 節点 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ は, 集合 $\{\boldsymbol{u}^{(i)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ の要素である節点と隣接し, 他の節点と隣接しない.

図 1 に, B_3 の例を示す. 図では, 単純化のため順列 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ を $u_1, u_2, \ldots, u_n$ と表記する.

B_n は次数 n, 連結度 n の単純かつ対称なグラフである. B_n には, 多項式時間の最短経路選択アルゴリズムは存在しない. しかし, Cohen らにより, 経路長高々$2n$, 時間計算量 $O(n^2)$ の経路選択アルゴリズムが提案されている [2]. 本稿では, このアルゴリズムを CB と呼ぶ.

定義 3 B_n の節点のうち, 順列の最右位置に $k(1 \leq |k| \leq n)$ を持つ節点によって導出される部分グラフは, B_{n-1} を構成する.

この部分グラフを部分焦げたパンケーキと呼び, k を添え字として, $B_{n-1}(k)$ と表記する.

B_n は, 互いに素な $2n$ 個の B_{n-1} に分解可能である. 本稿では, この B_n の再帰構造を利用した耐故障経路選択アルゴリズムを提案する.

本稿では, 節点 $\boldsymbol{u}$ から節点 $\boldsymbol{v}$ への経路を $\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{v}$ で表す. また, 隣接している 2 節点 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 間の経路を $\boldsymbol{s} \rightarrow \boldsymbol{t}$ で表すこととする.

A fault tolerant routing algorithm for burnt pancake graphs
Tatsuya Iwasaki and Keiichi Kaneko
Tokyo University of Agriculture and Technology

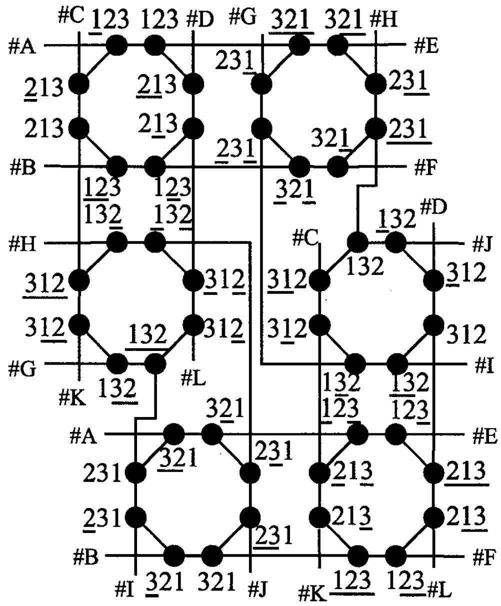

図 1: B_3 の例.

3. 耐故障経路選択アルゴリズム

ここでは, まず補助定理を示し, 次に定理を証明する.

補助定理 1 節点 $\boldsymbol{u}$ と $n-1$ 個の故障節点が与えられた時, $\boldsymbol{u}$ から $B_{n-1}(i)$ (ただし, $i \neq u_n$) の節点へ非故障な経路を長さ高々5, $O(n^2)$ で構成できる.

補助定理 2 任意の節点 $\boldsymbol{u}$ と $n-1$ 個の故障節点が与えられ, 故障節点の 1 つが $B_{n-1}(\underline{u_n})$ に含まれる時, $\boldsymbol{u}$ から $B_{n-1}(i)$ (ただし, $i \neq u_n, \underline{u_n}$) の節点へ, 非故障な経路を長さ高々4, $O(n^2)$ で構成できる.

補助定理 3 任意の節点 $\boldsymbol{u}$ と $n-1$ 個の故障が与えられた時, $\boldsymbol{u}$ から故障を含まない $B_{n-1}(i)$ (ただし, $i \neq u_n$) へ非故障な経路を長さ高々2, $O(n^2)$ で構成できる.

定理 1 B_n において, 非故障な 2 節点 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ と故障節点の集合 $F(1 \leq |F| < n)$ が与えられたとき, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ 間に非故障な経路を長さ高々$2n+4$, 時間計算量 $O(n^2)$ で構成できる.

証明 出発節点 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in B_{n-1}(s_n)$, 目的節点 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B_{n-1}(t_n)$ とする. このとき, $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{t}$ の位置関係, および故障節点の分布によって, 次のように場合分けし, 経路を構成する.

場合 1 $s_n \neq t_n$

場合 1-1 $B_{n-1}(s_n)$ または $B_{n-1}(t_n)$ に故障が存在しない

ここでは $B_{n-1}(t_n)$ に故障が存在しないと仮定する.

$\boldsymbol{s}$ から $B_{n-1}(t_n)$ へ補助定理 1 より非故障な経路 $\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{s}'$ を構成する. $B_{n-1}(t_n)$ 内部には故障がないため, アルゴリズム CB を用い, 非故障経路 $\boldsymbol{s}' \Rightarrow \boldsymbol{t}$ を構成できる. このとき, 最大経路長は $2(n-1)+5 = 2n+3$ となる.

場合 1-2 $B_{n-1}(\underline{s_1})$ または $B_{n-1}(\underline{t_1})$ に故障が存在しない

$B_{n-1}(s_n)$ および $B_{n-1}(t_n)$ に少なくとも 1 つ故障が存在しており，$B_{n-1}(\underline{t_1})$ に故障が存在しないと仮定する．

補助定理 1 より，非故障な経路 $\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{s}' \in B_{n-1}(\underline{t_1})$ を，経路長高々5 で構成する．同様に，経路 $\boldsymbol{t} \rightarrow \boldsymbol{t}^{(n)} = \boldsymbol{t}' \in B_{n-1}(\underline{t_1})$ を構成する．

$\boldsymbol{s}'$，$\boldsymbol{t}'$ は，$B_{n-1}(\underline{t_1})$ の節点であるため，アルゴリズム CB を用い，非故障な経路 $\boldsymbol{s}' \Rightarrow \boldsymbol{t}'$ を構成できる．このとき，最大経路長は $2(n-1)+5+1=2n+4$ となる．

場合 1-3 $B_{n-1}(i)$ $(i = s_n, t_n, \underline{s_1}, \underline{t_1})$ に故障が存在する

補助定理 3 より，$\boldsymbol{s}$ から故障を含まない $B_{n-1}(i)(1 \le |i| \le n)$ へ非故障な経路 $\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{s}'$ を構成することができる．

次に，補助定理 2 より，$\boldsymbol{t}$ から $B_{n-1}(i)$ へ非故障な経路 $\boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{t}' \in B_{n-1}(i)$ を構成することができる．

$\boldsymbol{s}'$，$\boldsymbol{t}'$ は，$B_{n-1}(i)$ の節点であるため，アルゴリズム CB を用い，非故障な経路 $\boldsymbol{s}' \Rightarrow \boldsymbol{t}'$ を構成できる．このとき，最大経路長は $2(n-1)+2+4=2n+4$ となる．

場合 2 $s, t \in B_{n-1}(i)$ $(1 \le |i| \le n)$

場合 2-1 $B_{n-1}(i)$ に故障が存在しない

$B_{n-1}(i)$ の内部でアルゴリズム CB を用いて，経路を構成できる．最大経路長は $2(n-1)=2n-2$ となる．

場合 2-2 $B_{n-1}(i)$ に全ての故障が含まれる

$\boldsymbol{s} \rightarrow \boldsymbol{s}^{(n)} = \boldsymbol{s}' \in B_{n-1}(\underline{s_1})$ は故障を含まない．

また，補助定理 1 より，非故障な経路 $\boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{t}' \in B_{n-1}(\underline{s_1})$ を経路長高々5 で構成できる．

$\boldsymbol{s}'$，$\boldsymbol{t}'$ は，$B_{n-1}(\underline{s_1})$ の節点であるため，アルゴリズム CB を用いて，非故障な経路 $\boldsymbol{s}' \Rightarrow \boldsymbol{t}'$ を構成できる．よって，最大経路長は $2(n-1)+1+5=2n+4$ となる．

場合 2-3 上記以外

この場合，$B_{n-1}(i)$ の内部で，この議論を繰り返すことで経路を構成できる．構成される経路の最大経路長は $2(n-1)+4=2n+2$ となる．

以上の場合分けに基づいて構成したアルゴリズム FT の最大経路長は $2n+4$ となる．また，故障を含まない $B_{n-1}(i)$ への経路構成には，補助定理 1，2，3 より，$O(n^2)$．$B_{n-1}(i)$ 内部での経路構成には，$O(n^2)$ かかる．よって，経路全体の構成にかかる時間計算量は $O(n^2)$ となる． □

4. 計算機実験

2 から 50 までの n に対して，それぞれ 100,000 通りの $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ および $n-1$ 個の故障節点の組に対し，FT により経路を構成した．図 2，3 に最大経路長，平均経路長および平均時間計算量を測定した結果を示す．

図 2 から最大経路長は高々$2n+4$ となっているのが見て取れる．また，図 3 から平均時間計算量は $O(n^{1.8})$ に収束したことがわかる．

5. 結論

B_n における耐故障経路選択アルゴリズム FT を示した．FT によって与えられる経路の経路長は，高々$2n+4$，経路構成にかかる時間計算量は $O(n^2)$ となることを証明した．また，計算機実験を行い，その結果を示した．

今後の課題として，経路長の改善や，本手法を応用して，複数の故障節点を 1 つのクラスタと考え，より多くの故障節点を許容できる耐クラスタ故障の経路選択アルゴリズムを提案することなどが挙げられる．

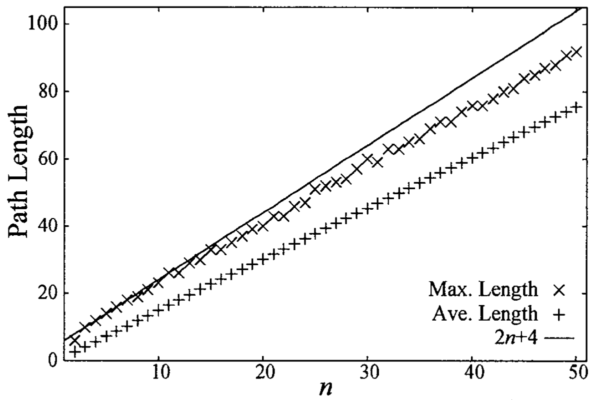

図 2: 経路長.

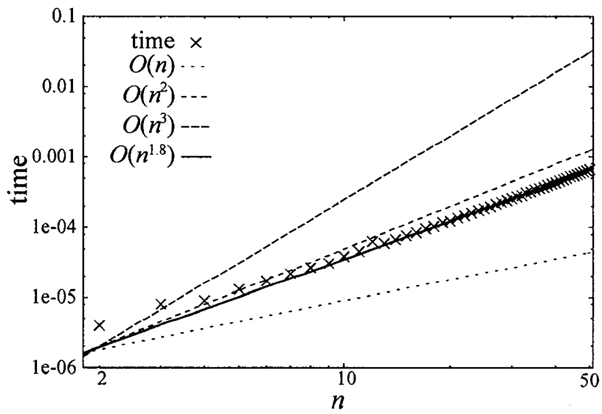

図 3: 平均時間計算量.

謝辞

本研究の一部は，科研費 (課題番号 19500022) による．

参考文献

[1] S.B.Akers and B.Krishnamurthy: "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks," *IEEE Trans. on Comp.*, 38, (4), 555–566, 1989.

[2] D.S.Cohen and M.Blum: "On the problem of sorting burnt pancakes", *Discrete Applied Mathematics*, 61, 105–120, 1995.

[3] L.Gargano, U.Vacaro and A.Vozella: "Fault Tolerant Routing in the Star and Pancake Interconnection Networks.", *Inf. Process. Lett.*, 45,(6), 315–320, 1993.

[4] Q.P.Gu and S.Pen: "Optimal Algorithms for Node-to-Node Fault Tolerant Routing in Hypercubes.", *The Comp. Jour.*, 39,(7), 626–629, 1996.

[5] W.H.Gates and H.Papadimitriou: "Bounds for sorting by prefix reversal", *Discrete Mathematics*, 27, 47–57, 1979.