パンケーキグラフにおける節点対間の互いに素な耐クラスタ故障経路選択アルゴリズム

渡部 達朗† 金子 敬一† 彭 旭東‡
†東京農工大学工学府 ‡法政大学情報科学部

1 はじめに

並列計算システムの規模拡大に伴い，システム内に故障要素を持ったまま動作可能なアルゴリズムの開発は不可避である．また，単一故障より複数のクラスタ故障を想定したアルゴリズムの方が現実的である [2]．本論文では，並列計算機の位相として有望な n-パンケーキグラフ [1] において，$n-2k$ 個のクラスタ故障を仮定し，k 組の出発節点と目的節点の節点対それぞれに対し素な経路を構成する耐クラスタ故障経路選択アルゴリズム Pkcft を提案する．

2 準備

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を $\langle n \rangle = \{1, 2, \ldots, n\}$ の任意の順列とする．順列 $\boldsymbol{p}$ と整数 i $(2 \le i \le n)$ に対して，操作 $\boldsymbol{p}^{(i)} = (p_i, p_{i-1}, \ldots, p_2, p_1, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ を前置反転と呼ぶ．$\boldsymbol{p}^{(i_1, i_2, \ldots, i_k)} = (\boldsymbol{p}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})})^{(i_k)}$ なる表記を用いる．ただし，$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{p}^{(i,i)} = \boldsymbol{p}$ である．

2 つの節点 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ 間の最短経路長を $d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$ で表す．グラフ G の直径は $d(G) = \max\{d(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) \mid \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in V(G)\}$ によって表す．

定義 1 n-パンケーキグラフ P_n は，$n!$ 個の節点を持つ．各節点 $\boldsymbol{p}$ は，$\langle n \rangle$ の順列 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ である．各節点 $\boldsymbol{p}$ は，前置反転によって与えられる $n-1$ 個の順列 $\boldsymbol{p}^{(i)}$ $(2 \le i \le n)$ の節点と隣接する．

P_n は，無向かつ節点対称で $n-1$ 連結なグラフである．図 1 は，P_n の例を示している．

定義 2 k $(1 \le k \le n)$ に対して，P_n において節点集合 $\{\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid \boldsymbol{p} \in P_n, p_n = k\}$ によって導出される部分グラフ $P_n(k)$ を考える．このとき，$P_n(k)$ は $(n-1)$-パンケーキグラフであり，P_n は，n 個の $P_n(k)$ $(1 \le k \le n)$ に分解可能である．$P_n(k)$ を部分パンケーキと呼ぶ．

図 1 中で破線の円で示す部分グラフは，$P_4(3)$ を表す．

k-pairwise Cluster-Fault-Tolerant Disjoint Routing in Pancake Graphs
†Tatsuro WATANABE †Keiichi KANEKO ‡Shietung PENG
†Graduate School of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology
‡Faculty of Computer and Information Sciences, Hosei University

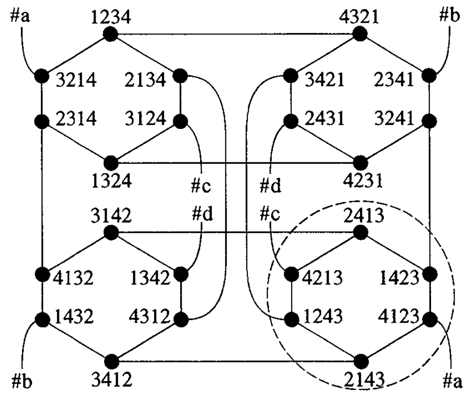

図 1: P_4 の例.

定義 3 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を $P_n(k)$ の節点とする．このとき，節点 $\boldsymbol{p}$ を $P_n(p_n)$ から $P_n(p_1)$ へのポートと呼ぶ．また，節点集合 $D_n(k, l) = \{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p} \in P_n(k)$ かつ $\boldsymbol{p}^{(n)} \in V(P_n(l))\}$ を $P_n(k)$ から $P_n(l)$ へのポート集合と呼ぶ．

$P_n(k)$ 中の節点は，$n-1$ 個のポート集合 $D_n(k, l)$ $(l \in \langle n \rangle \setminus \{k\})$ に分割される．ポート集合中の節点数は，$(n-2)!$ である．もし $l \neq m$ ならば，$D_n(k, l) \cap D_n(k, m) = \emptyset$ である．節点 $\boldsymbol{p} \in P_n(p_n)$ は，ポート集合 $D_n(p_n, p_1)$ 中の節点であり，任意の隣接節点 $\boldsymbol{p}^{(i)}$ は，$D_n(p_n, p_i)$ $(p_i \in \langle n \rangle \setminus \{p_1, p_n\})$ 中にある．

定義 4 直径が高々2 の部分グラフをクラスタと呼び，クラスタ中のすべての節点が故障しているものをクラスタ故障と呼ぶ．

$\mathcal{F}$ をクラスタ故障の集まりとし，F をクラスタ故障中の故障節点の集合，すなわち，$F = \cup_{C \in \mathcal{F}} C$ とする．

P_n のクラスタ C に対して，$d(C) = 0$ あるいは $d(C) = 2$ ならば，C の中心は唯一つに定まる．もし，$d(C) = 1$ ならば，C の 2 つの節点のうち 1 つを任意に選択し，C の中心とする．

P_n 中の任意のクラスタ C は，高々2 つの部分パンケーキグラフに含まれることに注意．もし，C の中心 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ が，部分パンケーキグラフ $P_n(c_n)$ に含まれるならば，その $n-2$ 個の隣接節点 $\boldsymbol{c}^{(i)}$ $(2 \le i \le n-1)$ も $P_n(c_n)$ に含まれ，ただ 1 つの節点 $\boldsymbol{c}^{(n)}$ が $P_n(c_1)$ に含まれる．

補助定理 1 P_n 中の節点 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ および $k \in \langle n \rangle \setminus \{p_1, p_n\}$ に対して，$p \notin C$，かつその中心 $c \notin P_n(k)$ なるクラスタが存在するならば，p から $P_n(k)$ 中の節点までの長さ高々3 の経路を少なくとも 1 本は構成することができる．

補助定理 2 P_n において，$|F| \le n-2$ なる故障節点集合 F，および 2 つの非故障節点 s と t に対して，s と t の間の長さ高々$2n-1$ の非故障経路を時間計算量 $O(n^2)$ で構成することができる．

3 経路選択アルゴリズム Pkcft

補助定理 3 P_n において，$2 \le k \le \lceil (n-1)/2 \rceil$ なる k 組の非故障節点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ と $|\mathcal{F}| \le n - 2k$ なるクラスタ故障集合 $\mathcal{F}$ があるとき，クラスタ故障の中心を含まず，s_i または $t_i (1 \le i \le k)$ は含むが $i \ne j$ なる s_j, t_j を含まない k 個の候補パンケーキ $P_n(l)$ が存在する．

補助定理 4 P_n において，k 組の非故障節点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k) (2 \le k \le \lceil (n-1)/2 \rceil)$ とクラスタ故障集合 $\mathcal{F} (|\mathcal{F}| \le n - 2k)$ があるとき，節点対 $(s_i, t_i) (1 \le i \le k)$ に対して，クラスタ故障の中心と $j \ne i$ なる s_j, t_j を含まない目的パンケーキ $P_n(l_i)$ へ長さ高々3 の素な非故障経路 $s_i \rightsquigarrow g_{l_i} \in P_n(l_i), t_i \rightsquigarrow h_{l_i} \in P_n(l_i)$ を $O(kn^2)$ の計算量で構成できる．

(証明) 補助定理 3 から成る $P_n(l)$ より，候補パンケーキ集合 V_G とする．節点対である節点 $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ を要素とする集合 V_p とする．次に以下の優先順位に従って，$P_n(l)$ を 1 組の節点対 (s_i, t_i) に対して目的パンケーキ $P_n(l_i)$ として，重複しないように割り当てていく．

1. ある 1 組の節点対 (s_i, t_i) のみを含んでおり，それ以外の V_p を含んでいない $P_n(l) \in V_G$ が存在するとき，その節点対に $P_n(l)$ を $P_n(l_i)$ として割り当てる．

2. ある 1 組の節点対 (s_i, t_i) のどちらか片方の節点のみを含んでおり，それ以外の V_p を含んでいない $P_n(l) \in V_G$ が存在するとき，その $P_n(l)$ を $P_n(l_i)$ として割り当てる ($s_i = g_{l_i}$ または $t_i = h_{l_i}$)．

3. ある 1 組の節点対 (s_i, t_i) に対し $s_i^{(n)} \in P_n(l)$ または $t_i^{(n)} \in P_n(l)$ かつ，それ以外の V_p を含んでいない $P_n(l) \in V_G$ が存在するとき，$P_n(l)$ を $P_n(l_i)$ として割り当てる ($s_i^{(n)} = g_{l_i}$ または $t_i^{(n)} = h_{l_i}$)．

4. $P_n(l)$ を割り当てられていない節点対 (s_i, t_i) に対し，未割り当ての V_G の 1 つを $P_n(l_i)$ として割り当てる

s_i から g_{l_i} または t_i から h_{l_i} の経路を見つける際に $s_j \rightsquigarrow g_{l_j}, t_j \rightsquigarrow h_{l_j}$ をクラスタ故障として見なすことができる．これは s_i から g_{l_i} へ経路を構成するときに $|\mathcal{F}| + 2(k-1) \le n-2$ 個のクラスタが存在することを意味する．以上と補助定理 3 より，経路 $s_i \rightsquigarrow g_{l_i}, t_i \rightsquigarrow h_{l_i}$ を構成することができる．

□

定理 5 P_n において，k 組の非故障節点対 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ $(2 \le k \le \lceil (n-1)/2 \rceil)$ と，クラスタ故障集合 $\mathcal{F} (|\mathcal{F}| \le n - 2k, d(\mathcal{F}) \le 2)$ があるとき，k 本の故障のない高々長さ $2n+3$ の素な経路 $s_i \rightsquigarrow t_i$ を $O(kn^2)$ の計算量で構成できる．

(証明) 補助定理 4 で割り当てたそれぞれの $P_n(l_i)$ 内で補助定理 2 を適用することで $s_i \rightsquigarrow g_{l_i} \rightsquigarrow h_{l_i} \rightsquigarrow t_i$ の k 本の素な非故障経路を構成できる．最大経路長は $2(n-1) - 1 + 3 + 3 = 2n + 3$ となる．すべてのクラスタの中心をみつけるのに $O(|\mathcal{F}|n)$，k 個の $P_n(l_i)$ それぞれに素な経路 $s_i \rightsquigarrow g_{l_i}, t_i \rightsquigarrow h_{l_i} (1 \ge i \ge k)$ を構成するのに補助定理 4 より $O(kn^2)$，k 個の $P_n(l_i)$ それぞれにおいて，経路 $g_{l_i} \rightsquigarrow h_{l_i}$ を構成するのに $O(kn^2)$ かかる．$|\mathcal{F}| < \backslash$ であるため，非故障節点対 (s_i, t_i) における素な k 本の経路を，計算量 $O(kn^2)$ で構成できる． □

4 結論

本論文では，P_n における経路選択アルゴリズム Pkcft を提案した．

今後の課題としては，アルゴリズムの改善や他のケイリーグラフに対して同様の手法を適用できるか試すといったことがあげられる．

謝辞

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金 (課題番号 19500022) の助成による．

参考文献

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy: "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks," *IEEE Trans.on Comp.*, vol.38, no.4, pp.555-566, 1989.

[2] 渡部達朗, 金子敬一, 彭 旭東: "パンケーキグラフにおける半素な耐クラスタ故障経路選択" 電子情報通信学会技術研究報告. DC, ディペンダブルコンピューティング, vol.107, no.174, pp. 13-18, 2007.