

## 重調和方程式の有限要素解の収束について

今野 佑哉<sup>†</sup> 久保田 光一<sup>‡</sup>中央大学大学院 理工学研究科 情報工学専攻<sup>†‡</sup>

要約: 重調和方程式のディリクレ境界値問題の有限要素近似解について, その収束速度は解析領域の形状により異なる値を取ることが報告されている [1]. 本研究では収束速度と解析領域の形状との関係を数値実験により, 確認した.

キーワード: 定義領域の形状, 収束速度

## 1 序論

## 1.1 背景

重調和方程式のディリクレ境界値問題について, 有限要素法により計算した近似解の誤差の収束速度は一定でなく, 解析領域の最大内角  $\omega$  (図 1) の値によって決まる. その収束速度を水谷は理論的に導出した [1].

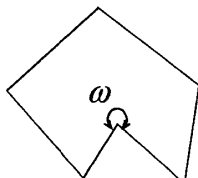


図 1 解析領域

重調和方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u(x, y) = f(x, y) \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

## 1.2 目的

重調和方程式を解く有限要素法のプログラムを実装する. これにより解析領域の最大内角と有限要素解の誤差の収束速度の関係を求める.

## 2 はじめに

本研究の有限要素法プログラムには, リッツ法を用いた. また形状関数には双 3 次関数を用い, 区分領域には 4 辺形を用いた.

解析領域の最大内角が  $\frac{1}{2}\pi$  の場合と,  $\frac{3}{2}\pi$  の場合の実験を行い, 解析領域の形状と誤差の収束速度の関係を実験から確認する.

## 3 重調和方程式の有限要素解の誤差の収束速度

解析領域の形状を変化させ, 各形状での有限要素解のいくつかの点での誤差の収束速度を観察する.

## 3.1 実験 1

定義領域が正方形の場合の実験をする. 厳密解を  $x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$  とすると, 式 (2) の  $f(x, y)$  は

$24(x^2(1-x)^2 + y^2(1-y)^2) + 8(1-6x+6x^2)(1-6y-6y^2)$  となる. 解析領域は図 2 である.

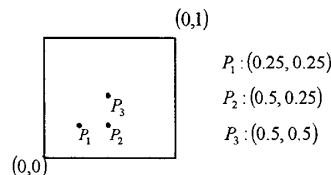


図 2 正方形領域

図 2 の領域内部の 3 頂点  $P_1, P_2, P_3$  における近似解の誤差を図 3 に両対数グラフで示す. 図の横軸は有限要素の 1 辺の長さ, 縦軸は誤差の大きさである.

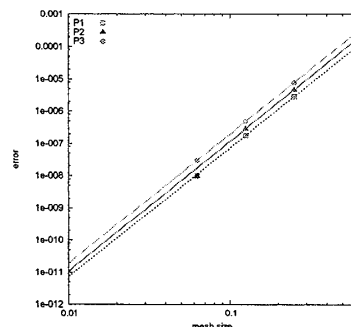


図 3 最細分割近似解との差

近似曲線の傾きを算出し頂点  $P_1, P_2, P_3$  における近似解の誤差の収束速度を求める. なお, 解析解や補外解との誤差のグラフも同様の結果を示したため省略する. 結果を表 1 に纏める.

表 1 頂点  $P_1, P_2, P_3$  での誤差の収束速度

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
解析解	4.01725	4.00962	4.06557
補外解	4.0013	4.03245	4.01301
最細分割近似解	4.0013	4.03245	4.01301

この実験では, 図 2 の入力に対し, 区分領域の 1 辺長が 0.03125 の場合までの近似解を求めた. 区分領域が一番小さい場合の近似解を最細分割近似解と呼び, これと他の近似解との差も評価する. また補外法による解を求める際に, 誤差の収束速度は水谷 [1] の値を用いた.

## 3.2 実験 2

定義領域が L 字形の場合の実験をする. 式 (2) の右辺の  $f(x, y)$  は 1 とする. 解析解は不明であるため誤差は補外解と最細分割近似解によって評価する. 解析領域は図 4 である.

On Convergence Rate of Finite Element Method Solution for Biharmonic Equation

<sup>†</sup> Konno Yuuya, Information and System Engineering Course, Graduate School of Science and Engineering, CHUO University

<sup>‡</sup> Koichi Kubota, Information and System Engineering Course, Graduate School of Science and Engineering, CHUO University

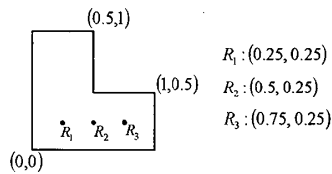


図4 L形領域

図4の領域内部の頂点  $R_1, R_2, R_3$  における近似解の誤差を  
図5に両対数グラフで示す。縦軸と横軸は実験1と同様である。

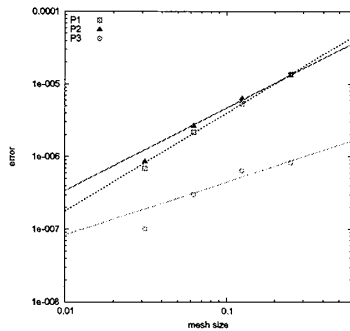


図5 L領域での最細分割近似解との差

補外解との誤差のグラフも同様の結果を示したため省略する。頂点  $R_1, R_2, R_3$  における近似解の誤差の収束速度を求め、表2に纏める。

表2 頂点  $R_1, R_2, R_3$  での誤差の収束速度

	$R_1$	$R_2$	$R_3$
補外解	1.198	1.00833	0.562544
最細分割近似解	1.34613	1.13647	0.730033

補外解の求め方、及び最細分割近似解は実験1と同様である。ここで図5において、 $R_3$  に関し区分領域の大きさが0.5の場合の誤差が同  $R_3$  のより細かい分割の場合の誤差を結ぶ線から大きくはずれている。これは分割が荒いため、L型領域の場合は近似が上手くいかなかったためと考えられる。よってこれを除いた近似解の誤差の収束速度を求めたところ  $R_3$  における値が表2の値と大きく異なったため、表3に表す。

表3 頂点  $R_3$  での誤差の収束速度2

	$R_3$
補外解	0.955557
最細分割近似解	1.19077

### 3.3 実験3

定義領域がクランク形の場合の実験をする。式(2)の  $f(x, y)$  は1とする。解析解は不明であるため誤差は補外法による解と最細分割近似解によって評価する。また解析領域は図6である。

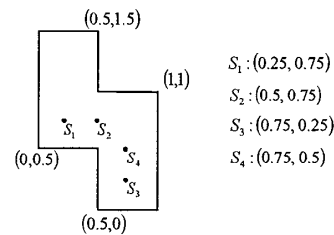


図6 クランク形領域

図6の領域内部の頂点  $S_1, S_2, S_3, S_4$  の誤差を図7に両対数  
グラフで示す。縦軸と横軸は実験1と同様である。

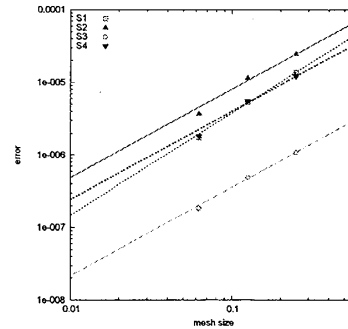


図7 クランク領域での最細分割近似解との差

補外解との誤差のグラフも同様の結果を示したため省略する。頂点  $S_1, S_2, S_3, S_4$  における近似解の誤差の収束速度を求め、表4に纏める。

表4 頂点  $S_1, S_2, S_3, S_4$  での誤差の収束速度

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
補外解	1.12383	0.97902	0.713625	0.975606
最細分割近似解	1.40801	1.21616	1.21843	1.21243

補外解の求め方、及び最細分割近似解は実験1と同じである。

## 4 結論

水谷 [1] によると解析領域の最大内角が  $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$  の場合、 $L^2$  ノルムの誤差の収束速度はそれぞれ4, 1.088967... である。これをふまえて本研究の実験結果を考察する。

3つの実験により得たいくつかの点における収束速度は理論値 [1] とくらべ、近い値をとっているがやや違いがある。

この原因は、実験データが足りない点と考えられる。本実験では区分領域の1辺長が0.003125の近似解までしか得られなかった。これにより、分割が荒く近似解の誤差が安定しないデータを用いて近似解の誤差の収束速度を計ったため実験結果が理論値 [1] とやや離れた値をとったものと思われる。

本実験で得た結果に対し、領域の最大内角の大きさが  $\frac{3}{2}\pi$  である場合の収束速度と  $\frac{1}{2}\pi$  の場合の収束速度の違いを確認した。

## 参考文献

- [1] Akira Mizutani, "On the Finite Element Method for the Biharmonic Dirichlet Problem in Polygonal Domains", JAPAN journal of Industrial and Applied Mathematics, vol. 22, no. 1, pp. 45-56, 2005.
- [2] J.J. コナー, C.A. プレビア共著, 坂井 藤一, 岩本 卓也共訳, "流体解析への有限要素法の応用", サイエンス社, 1981.