

3次元格子状接続並列計算機による、疎密のある物理空間の計算のためのマッピングアルゴリズム：ミラーマッピング

村田 淳†

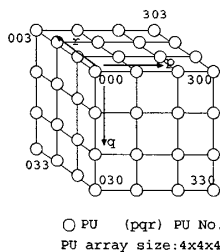
† 千葉大学大学院融合科学研究科

1 はじめに

偏微分方程式を差分法（陽解法）で計算する場合には、離散化された物理空間の格子点に疎密をつけることにより、部分的に精度を上げしかも全体の計算量を少なくすることが出来る [1] [2].

筆者は 1994 年に、離散化された 2 次元物理空間の格子点間隔に変化を付けた「疎密のある物理空間」を定義し、これを 2 次元の格子状接続並列計算機で効率よく計算させるマッピングアルゴリズムである「ローリングマッピング」を提案した [1].

しかし、実際の物理問題は 3 次元も多い。そこで今回、3 次元の PU アレイを持つ格子状接続並列計算機で、疎密のある 3 次元物理空間を効率よく計算できるアルゴリズム「ミラーマッピング」を提案した。一定の条件の下で、離散化物理空間に疎密をつければ、計算機の各 PU の計算負荷を均一にしながら計算できる。図 1: $4 \times 4 \times 4$ の PU アレイの例 (アレイ内部の PU の表記は省略)



2 3次元のマッピングアルゴリズム「ミラーマッピング」

「ミラーマッピング」はローリングマッピングを 3 次元に拡張したものである。ここで言うマッピングとは、格子状接続並列計算機の PU と、計算する離散化物理空間の格子点の対応関係である。

2.1 PU アレイの鏡像体

ローリングマッピングは、“平面の PU アレイを、ひっくり返すようにして”物理空間を埋めていった。

しかし、ミラーマッピングでは、PU アレイは、 $m \times m \times m (= m^3)$ のサイズである立方体（実は直方体で

もいいのだがここでは簡単のため立方体とする）である。これを“ゴロゴロ転がすのではなく”，立方体の特定の 3 面に沿って、鏡面（対称面）を考え、その鏡像体を増やす方法で、3 次元物理空間を立方体で埋めていく。

2.2 PU アレイ 8 個の例

図 2: 立方体 (PU アレイ) 8 個分の物理空間

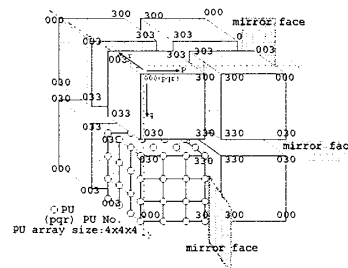


図 1 は、3 次元格子状接続並列計算機の PU アレイ（サイズ 4^3 ）の一例である。そして図 2 は、 $8 \times 8 \times 8$ の格子点を持つ物理空間を図 1 の PU アレイで埋める場合である（PU の○は、1 個の立方体をのぞいて省略している）。このとき、 x, y, z （物理空間の座標軸）に対して、それぞれ対称点をもうけてマップしている。字面で説明するより、図を見ていただいた方がわかりやすいと思われる。

このように PU アレイを配置すると、対称面で相対する隣接格子点は、同じ PU が担当することになる。そうすると PU アレイをサイクリック構造にする必要なく、周期境界条件の計算ができる。

物理空間の格子点座標 (x, y, z) と PU アレイ（サイズ m^3 ）の PU 番号 (p, q, r) との対応関係を数式で定義すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 P &= \text{mod}(x, 2m) \\
 p &= P & (P < m) \\
 p &= -P + 2m - 1 & (P \geq m) \\
 Q &= \text{mod}(y, 2m) \\
 q &= Q & (Q < m) \\
 q &= -Q + 2m - 1 & (Q \geq m) \\
 R &= \text{mod}(z, 2m) \\
 r &= R & (R < m) \\
 r &= -R + 2m - 1 & (R \geq m)
 \end{aligned}$$

均一な物理空間の場合には、上記の式に従って、大きな物理空間に対して、PU アレイ 8 個分を基本の大

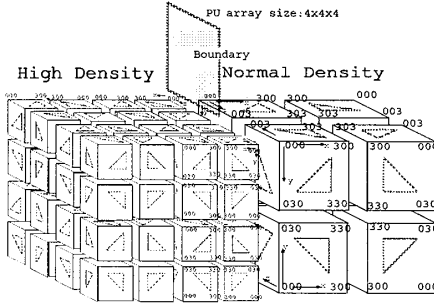
“Mirror Mapping”: A Mapping Algorithm for 3-D NNM Parallel Computer

† MURATA Atsushi(murata@graduate.chiba-u.jp)
Graduate School of Advanced Integration Science, Chiba University (†)
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, Japan

ききとして埋めていくことで、ミラーマッピングを行うことができる。

3 疎密のある3次元物理空間

図3: 疎密のある3次元物理空間の例



3.1 PUアレイ $2 \times 2 \times 2$ の基本の立方体

本研究で想定している3次元PUアレイに、格子点間隔に変化をつけた物理空間を適応させるには、以下の方法が考えられる。

まず、基本の密度の大きさを表わす立方体(図3の右側(Normal Density))を考える。この“基本の立方体”は、PUアレイサイズの8倍(2^3)である。

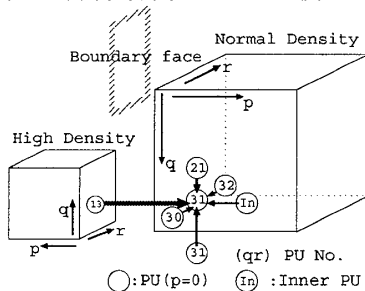
図3では簡単のため、密度を“基本の密度(Normal Density)”と“8倍の密度(High Density)”の2種類を描いた。

部分的に密度をあげる際には、“基本の立方体”の大きさを単位とする。この単位を分断するような中途半端な大きさや形の倍密化は許されない。なお、図3中の三角形記号は、PUアレイがどの方向を向いているかを示している。

図3の左側では、基本の立方体の大きさの部分に、8倍密、つまり体積にして8分の1の大きさの『小さな(実際には密度の大きい)』立方体を64個($=4^3$)埋めている。これが倍密化である。もちろん、密度を上げていく方法は、再帰的にできる。

3.2 疎密境界面

図4: 疎密境界面のデータの流れの例

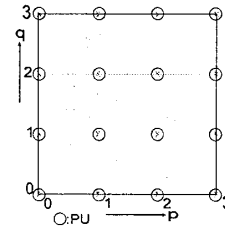


疎密のある物理空間では、基本の密度と8倍の密度の接する面(疎密境界面)に隣接する格子点を担当するPUは、同じとは限らないが、同じ面(図4では

$p=0$ の面)上に位置するPU間同士である。この疎密境界面上で隣接する格子点間のデータ交換は、実際にはPUアレイの6面のうちの3面(図3中の三角形が描かれている面、つまり $p=0, q=0, r=0$ の各面)のそれぞれの1面の中で帰結している。つまり、違う面に渡ったデータ交換はない。

3.3 疎密境界面を通ずるデータ交換

図5: 物理空間の疎密境界面のデータの流れに対応する実際のPU間のデータの流



疎密境界面を貫くデータ交換を1つ1つ実際のPU間で配線すると、その配線数は、 $O(m^2)$ である。

図5は、 $m=4$ の時の、物理空間の疎密境界面($r=0$)を貫く、倍密側→単密側のデータ交換が、実際のPUアレイ上でどのような流れになっているか示した様子の一例である。

しかし、1計算ステップの1回のデータ交換のために1つの配線をするなら、 m の大きさにより配線の限界があると考えられる。

実際には、 m は大きいので、1つ1つ配線する訳にはいかないし、1計算ステップの1回のデータ交換のために1づつ専用に配線をするのは非効率である。そこで、グローバルバスを張る等、共通の配線で複数のデータを送る方法が考えられる。

4 まとめ

本発表では、3次元の疎密のある物理空間を定義し、3次元格子状接続並列計算機のためのマッピングである「ミラーマッピング」を提案した。

今後は、疎密境界面のデータ交換の方法の提案と、その評価を行う予定である。また、実際の数値計算を用いて実用性の検証も行いたいと考えている。

参考文献

- [1] 数値計算における疎密のある物理空間に対応するマッピング: ローリングマッピング, 村田淳, 天野英晴, 情報処理学会論文誌第35巻第2号, 1994
- [2] Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations, Marsha J. Berger, Journal of Computational Physics 53, 484-512(1984)