τ 法による x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の数値計算

吉田 年雄[†]

正数 x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の能率的な数値計算法を提案している．本論文では，

$$U(a,b,x)=x^{-a}f(1/x)$$

で定義される $f(t)$ についての近似式を求めている（$t=1/x$）．$f(t)$ の満足する微分方程式

$$t^2f''(t)+\{(2a-b+2)t+1\}f'(t)+a(a-b+1)f(t)=0$$

に，τ 法を適用し，適当な工夫をすることにより，$f(t)$ に対して次の形の近似式

$$f_m(t)=\sum_{i=0}^{m}G_it^i\Big/\sum_{i=0}^{m}H_it^i$$

を得ている．

Computation of Kummer Functions $U(a,b,x)$ for Large Argument x by Using the τ-method

TOSHIO YOSHIDA[†]

In this paper we propose an efficient numerical method for Kummer functions $U(a,b,x)$ with large argument x. The function $U(a,b,x)$ is written

$$U(a,b,x)=x^{-a}f(1/x)$$

where $f(t)$ satisfies the differential equation

$$t^2f''(t)+\{(2a-b+2)t+1\}f'(t)+a(a-b+1)f(t)=0.$$

Applying the τ-method to the above equation, the following type of the approximation

$$f_m(t)=\sum_{i=0}^{m}G_it^i\Big/\sum_{i=0}^{m}H_it^i.$$

is obtained.

1. はじめに

合流型超幾何微分方程式（クンマーの微分方程式[1]ともいわれる）

$$x\frac{d^2w}{dx^2}+(b-x)\frac{dw}{dx}-aw=0 \qquad (1)$$

には，クンマー（Kummer）関数と呼ばれる次の二つの独立な解

$$M(a,b,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(b)_kk!}x^k \qquad (2)$$

と

$$U(a,b,x)=\frac{\pi}{\sin\pi b}\left\{\frac{M(a,b,x)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)}-x^{1-b}\frac{M(1+a-b,2-b,x)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right\} \qquad (3)$$

がある．ただし，

$$(a)_k=\Gamma(a+k)/\Gamma(a) \qquad (4)$$

である．式(3)は，b が整数 n のときには，極限 $b\to n$

† 中部大学 経営情報学部 経営情報学科
College of Business Administration and Information Science, Chubu University

で定義される．

本論文では，正数 x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の数値計算法について述べる．筆者は既に，$U(a,b,x)$ の特別な場合として，不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu,x)$

$$\Gamma(\nu,x)=e^{-x}U(1-\nu,1-\nu,x), \tag{5}$$

および，第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x)=\sqrt{\pi}e^{-x}(2x)^\nu U\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2x\right) \tag{6}$$

について，x が大きい場合の数値計算法[2),3)]を提案している．本方法は，それを一般の a，b の場合に拡張し，適当な工夫を加えたものである．

x が大きい場合には，漸近展開式

$$U(a,b,x) \approx x^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(a)_k(a-b+1)_k}{k!}\left(\frac{1}{x}\right)^k \tag{7}$$

を用いることが考えられる．a あるいは $a-b+1$ が 0 以下の整数である特別な場合には，有限級数となり，厳密式となる．しかし，それ以外の場合には発散し，適当な項までの和をとっても，x が十分に大きい場合を除いて，精度が出ない．また，$a>0$ ならば，積分表示式

$$U(a,b,x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-u}u^{a-1}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{b-a-1}du \tag{8}$$

を数値積分することより，$U(a,b,x)$ の値を求めることができるが，被積分関数を多数回にわたって計算しなければならないので能率的ではない．以下では，x が大きい場合の $U(a,b,x)$ の能率的な計算法を提案する．本方法は，以下に述べるように，微分方程式に τ 法[4)]を適用して，発散級数としての漸近展開を収束する関数列に変換するものであり，x が小さいときにも $U(a,b,x)$ を計算することができる．本方法は，x が大きければ大きいほど能率的である．

また，N.M. Temme は，$U(a,b,x)$ に対して，漸化式を用いる計算法を提案し，その問題点と工夫について報告している[5)]．その計算法と本計算法では，計算手順が全く異なるので，一概に比較はできないが，本方法は，後述するように，同一の a および b の値で，同じ程度の大きさの x に対して繰り返し計算する場合には，非常に能率的である．

2. 計算法

微分方程式 (1) において，$x=\infty$ は不確定特異点である．以下，

$$t=\frac{1}{x} \tag{9}$$

として，式 (1) を書き直せば，

$$t^2\frac{d^2w}{dt^2}+\{(2-b)t+1\}\frac{dw}{dt}-\frac{a}{t}w=0 \tag{10}$$

となる．

$$U(a,b,x)=t^af(t) \tag{11}$$

により，$f(t)$ を定義する．$f(t)$ は，t のみならず，a，b の関数である．上式 (11) を式 (10) に代入すると，

$$\begin{aligned}&t^2f''(t)+\{(2a-b+2)t+1\}f'(t)\\&+a(a-b+1)f(t)=0\end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．上式に対して，$f(0)=1$ を満たす形式的級数解は，

$$f(t)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i t^i \tag{13}$$

である．ただし，

$$\lambda_i=(-1)^i\frac{(a)_i(a-b+1)_i}{i!} \tag{14}$$

である．これは，$t=0$ を中心とする $f(t)$ の漸近展開式となっている．

2.1 τ 法

式 (12) に τ 法を適用して，t が小さいときの $f(t)$ の近似式を求めることにする．η を適当な定数として，$0\le t\le\eta$ における近似式を求めるために，式 (12) の右辺に，直交区間 $0\le t/\eta\le 1$（η：適当な定数）のずらし超球多項式[6)]（Shifted Ultraspherical Polynomial）を τ 倍したものを付加した次の形の微分方程式を考える．

$$\begin{aligned}&t^2f''(t)+\{(2a-b+2)t+1\}f'(t)\\&+a(a-b+1)f(t)\\&\quad=\tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\eta}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

ずらし超球多項式は，直交多項式の一種であり，

$$\begin{aligned}C_m^{*(\alpha)}(t)&=\sum_{i=0}^{m}C_{mi}^{*(\alpha)}t^i\\&=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha)}\\&\quad\times\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}\Gamma(2\alpha+m+i)}{i!(m-i)!\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}+i)}t^i\end{aligned} \tag{16}$$

にて定義され ($\alpha > -\frac{1}{2}$), $\alpha = 0$ のときには，$C_m^{*(0)}(t) = \lim_{\alpha\to 0} C_m^{*(\alpha)}/\alpha = 2T_m^*(t)/m$，すなわち，ずらしチェビシェフ多項式に相当し，$\alpha = 0.5$ のときには，ずらしルジャンドル多項式 $P_m^*(t)$ となる．式 (15) は多項式解を特解としてもつ．次に，その特解を求めるために新たな次の定理を導いておく．

［定理］

同次微分方程式

$$(t^2+c_1t)F''(t)+(c_2t+c_3)F'(t)+c_4F(t) = 0 \tag{17}$$

の右辺に，t^k（k は，$k \geq 0$ なる整数）を付加した同次微分方程式

$$(t^2+c_1t)F''(t)+(c_2t+c_3)F'(t)+c_4F(t) = t^k \tag{18}$$

に対して，$kc_1+c_3 \neq 0$ のとき，

$$F(t) = -\frac{\sum_{i=0}^{k} d_i t^i}{(k+1)(kc_1+c_3)d_{k+1}} \tag{19}$$

は，その特解である．ただし，d_i は式 (17) の形式的級数解 $\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i$ の係数である．

証明は，$\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i$ を式 (17) に代入し，すべての項のベキを同じ形に書き直すと，

$$\{i(i-1)+ic_2+c_4\}d_i+(i+1)(ic_1+c_3)d_{i+1} = 0 \quad (i=0,1,\cdots\cdots) \tag{20}$$

が得られ，式 (19) を式 (18) の左辺に代入し，式 (20) を考慮することによりなされる．

上の定理を用いると，式 (15) の特解として，m 次の多項式解

$$f_m(t) = -\tau \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{l=0}^{k} \lambda_l t^l}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k} \tag{21}$$

が得られる．ただし，$C_{mk}^{*(\alpha)}$ は式 (16) で与えられる係数である．式 (15) の τ が十分に小さいならば，$0 \leq t \leq \eta$ において，この $f_m(t)$ は，$f(t)$ の近似式となると考えることができるであろう．$f(0)=1$ より，$f_m(0)=1$ とすれば，τ は，

$$\tau = -\frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k}} \tag{22}$$

と決められる．したがって，$f_m(t)$ は，

$$f_m(t) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} \sum_{l=0}^{k} \lambda_l t^l}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k}} \tag{23}$$

として与えられる．式 (22) の τ の大きさは，m を増すと小さくなる．上式は漸近展開式 (13) の k 項までの和 ($k = 0, 1, \ldots, m$) の重みつき平均を表している．

2.2 誤差解析

$f(t)$ に対する近似式 $f_m(t)$ の絶対誤差 $E_m(t)$ を，

$$E_m(t) = f_m(t) - f(t) \tag{24}$$

と定義すると，式 (12) より，

$$t^2E_m''(t)+\{(2a-b+2)t+1\}E'(t) +a(a-b+1)E_m(t) = \delta_m(t) \tag{25}$$

が成り立つ．ただし，

$$\delta_m(t) = -\frac{C_m^{*(\alpha)}(t/\eta)}{\sum_{k=0}^{m} \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k}} \tag{26}$$

である．上式の一般解を求めよう．式 (12) の独立な解は，

$$f(t) = (1/t)^a U(a,b,1/t) \tag{27}$$

$$g(t) = (1/t)^a M(a,b,1/t) \tag{28}$$

である．したがって，定数変化法を用いれば，式 (25) の一般解として，

$$E_m(t) = Af(t) - f(t)\int_0^t \frac{\delta_m(u)g(u)}{u^2\Delta(u)}du + Bg(t) + g(t)\int_0^t \frac{\delta_m(u)f(u)}{u^2\Delta(u)}du \tag{29}$$

が得られる．ただし，A および B は初期条件によって決定される定数であり，

$$\Delta(u) = f(u)g'(u) - f(u)'g(u) = -(1/u)^{2a-b+2}e^{1/u}\Gamma(b)/\Gamma(a) \tag{30}$$

である．上式の第 2 式は，クンマー関数のロンスキアン関係式[7]を用いて得られる．

初期条件

$$\lim_{t\to 0} E_m(t) = 0 \tag{31}$$

は，式 (29) において，

$$\lim_{t\to 0} f(t)\int_0^t \frac{\delta_m(u)g(u)}{u^2\Delta(u)}du = 0, \quad \lim_{t\to 0} g(t)\int_0^t \frac{\delta_m(u)f(u)}{u^2\Delta(u)}du = 0 \tag{32}$$

であるので，

$$A\lim_{t\to 0} f(t) + B\lim_{t\to 0} g(t) = 0 \tag{33}$$

と表される．$\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ であるが，$\lim_{t\to 0} g(t)$ は存在しない（発散する）ので，上式が成り立つためには，

$$A = B = 0 \tag{34}$$

でなければならない．したがって，

$$\begin{aligned} &E_m(t) \\ &= -\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\frac{1}{t^a} \\ &\quad\times\int_0^t \frac{1}{u^{b-a}}\{M(a,b,1/t)U(a,b,1/u) \\ &\quad -U(a,b,1/t)M(a,b,1/u)\}e^{-\frac{1}{u}}\delta_m(u)du \end{aligned} \tag{35}$$

が得られる．

式 (35) において，被積分関数の $\delta_m(u)$ を除いた部分は有界である．したがって，$0 \le t \le \eta$ において，$m \to \infty$ のとき，$E_m(t)$ が 0 になるためには，$0 \le u \le t$ $(\le \eta)$ において，$m \to \infty$ のとき，$\delta_m(u)$ が 0 に一様収束すればよい．

さて，後の議論を簡単にするために，$\delta_m(u)$ を，

$$\delta_m(u) = -\tilde{C}_m^{*(\alpha)}(u/\eta)D(m,\eta) \tag{36}$$

のように書き表すことにする．ここで，

$$\tilde{C}_m^{*(\alpha)}(u) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(m+2\alpha)}C_m^{*(\alpha)}(u) \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &D(m,\eta) \\ &= 1\Bigg/\left(\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(m+2\alpha)}\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta_k}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

である．

$\alpha \ge 0$ の場合を考えよう．そのとき，$0 \le t \le \eta$ において，式 (36) の $\tilde{C}_m^{*(\alpha)}(u/\eta)$ は，

$$\tilde{C}_m^{*(\alpha)}(u/\eta) \le 1 \tag{39}$$

である．このことは，$\alpha = 0$ のとき，$\tilde{C}_m^{*(\alpha)}(u) = T_m^*(u)$（$T_m^*(u)$：ずらしチェビィシェフ多項式）であること，$\alpha > 0$ のとき，$C_m^{*(\alpha)}(u) \le \Gamma(m+2\alpha)/(\Gamma(m+1)\Gamma(2\alpha))$ であること[8]から分かる．したがって，$0 \le u \le t$ $(\le \eta)$ において，$m \to \infty$ のとき，$\delta_m(u)$ が 0 に一様収束するためには，$m \to \infty$ のとき，$D(m,\eta) \to 0$ となればよい．このことを以下に示そう．

$D(m,\eta)$ は，一般化された超幾何関数を用いて，次のように表される．

$$\begin{aligned} &D(m,\eta) \\ &= 1\Bigg/\left\{\frac{(-1)^{m+1}}{a(a-b+1)}\right. \\ &\quad\left.\times{}_3F_3\left(\begin{matrix}1, 2\alpha+m, -m \\ \alpha+1/2, a+1, a-b+2\end{matrix}\,\middle|\, -\frac{1}{\eta}\right)\right\} \end{aligned} \tag{40}$$

Y.L. Luke[9]によれば，$m \to \infty$ のとき，これは次のように評価できる．

$$\begin{aligned} &D(m,\eta) \\ &\approx 1\Bigg/\left\{\frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha)\Gamma(a-b+1)}{e^{3\sqrt[3]{m(m+2\alpha)/\eta}}}}{\dfrac{2\sqrt{3}\pi(-1)^{m+1}}{\{m(m+2\alpha)/\eta\}^{(\alpha+2a-b-\frac{1}{2})/3}}}\right\} \end{aligned} \tag{41}$$

上式は，$m \to \infty$ のとき，$1/\eta = 0$ を除いて，0 となる．

2.3 α の 選 定

さて，式 (35) の絶対誤差 $E_m(t)$ を次の形に書き換えよう．

$$E_m(t) = \frac{\Gamma(a)\{h_1(a,b,t) - h_2(a,b,t)\}}{\Gamma(b)t^a\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)\lambda_{k+1}\eta^k}} \tag{42}$$

ただし，

$$\begin{aligned} &h_1(a,b,t) \\ &= M(a,b,1/t) \\ &\quad\times\int_0^t \frac{1}{u^{b-a}}U(a,b,1/u)e^{-1/u}C_m^{*(\alpha)}(u/\eta)du \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &h_2(a,b,t) \\ &= U(a,b,1/t) \\ &\quad\times\int_0^t \frac{1}{u^{b-a}}M(a,b,1/u)e^{-1/u}C_m^{*(\alpha)}(u/\eta)du \end{aligned} \tag{44}$$

である．まず，$h_2(a,b,t)$ に着目しよう．u が十分に小さければ，漸近展開式[10]

$$\begin{aligned} &M(a,b,1/u) \\ &\approx \frac{\Gamma(b)e^{1/u}u^{b-a}}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b-a)_k(1-a)_k}{k!}u^k \end{aligned} \tag{45}$$

の第 $m+1$ 項（u の $m+1$ 次の項）がそれより前の項より十分に小さいときには，

$$\begin{aligned} &h_2(a,b,t) \\ &\approx U(a,b,1/t)\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

$$\times \int_0^t \sum_{k=0}^{m} \frac{(b-a)_k(1-a)_k}{k!} u^k C_m^{*(\alpha)}(u/\eta)du \tag{46}$$

となる．いま，$F_{m-1}(u)$ を $m-1$ 次の多項式とすれば，ルジャンドル多項式の直交関係より，

$$\int_0^{\eta} F_{m-1}(u)P_m^*(u/\eta)du = 0 \tag{47}$$

が成り立つ．したがって，t を η と置き，α を 0.5 とすれば，式 (46) は，

$$h_2(a,b,\eta) \approx U(a,b,1/\eta)\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\frac{(b-a)_m(1-a)_m}{m!} \times \int_0^{\eta} u^m P_m^*(u/\eta)du \tag{48}$$

となり，$\alpha \neq 0.5$ の場合より，小さな値になることが予想される．u が十分には小さくなくても，式 (44) の右辺の被積分関数の $C_m^{*(\alpha)}(u/\eta)$ を除いた部分が，$m-1$ 次の多項式で良い近似で表される関数ならば，その積分値は十分小さくなることが予想される．また，$a=b$ の場合には，

$$M(a,a,1/u) = e^{1/u} \tag{49}$$
$$U(a,a,1/u) = e^{1/u}\Gamma(1-a,x) \tag{50}$$

であるので，

$$h_2(a,a,\eta) = U(a,a,1/\eta)\int_0^{\eta} P_m^*(u/\eta)du = 0 \tag{51}$$

となる．

$h_1(a,b,t)$ についても，$t=\eta$，$\alpha=0.5$ の場合には，式 (43) の右辺の被積分関数の $C_m^{*(\alpha)}(u/\eta)$ を除いた部分が，多項式で良い近似で表される関数ならば，その積分値は十分小さくなることが予想される．

表 1，**表 2** および **表 3** には，η，a，b および m が表題で与えられた場合について，α を変化させたときの $h_1(a,b,\eta)$，$h_2(a,b,\eta)$ および $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$ の値を示した．η，a，b および m が他の場合についても同様な結果が得られ，上で述べた予想が妥当であることを例証している．したがって，

$$t=\eta, \quad \alpha = 0.5 \tag{52}$$

と選ぶことにする．

2.4 計 算 式

式 (23) において，式 (52) としたものにおいて，η は任意の値をとることができるので，あらためて，その η を t とすれば，

表 1 $\eta=0.1$，$a=2.7$，$b=0.4$，$m=10$ の場合の $h_1(a,b,\eta)$，$h_2(a,b,\eta)$ および $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$

Table 1 $h_1(a,b,\eta)$, $h_2(a,b,\eta)$ and $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$ in the case of $\eta=0.1$, $a=2.7$, $b=0.4$, $m=10$.

α	$h_1(a,b,\eta)$	$h_2(a,b,\eta)$	$h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$
0.0	$-1.44\cdot10^{-6}$	$-1.75\cdot10^{-6}$	$3.13\cdot10^{-7}$
0.1	$-1.08\cdot10^{-6}$	$-1.37\cdot10^{-6}$	$2.93\cdot10^{-7}$
0.2	$-7.62\cdot10^{-7}$	$-1.01\cdot10^{-6}$	$2.43\cdot10^{-7}$
0.3	$-4.82\cdot10^{-7}$	$-6.56\cdot10^{-7}$	$1.74\cdot10^{-7}$
0.4	$-2.30\cdot10^{-7}$	$-3.21\cdot10^{-7}$	$9.15\cdot10^{-8}$
0.49	$-2.28\cdot10^{-8}$	$-3.16\cdot10^{-8}$	$8.75\cdot10^{-9}$
0.5	$-8.36\cdot10^{-10}$	$-1.41\cdot10^{-15}$	$-8.36\cdot10^{-10}$
0.51	$2.09\cdot10^{-8}$	$3.14\cdot10^{-8}$	$-1.05\cdot10^{-8}$
0.6	$2.09\cdot10^{-7}$	$3.09\cdot10^{-7}$	$-1.00\cdot10^{-7}$
0.7	$4.01\cdot10^{-7}$	$6.06\cdot10^{-7}$	$-2.04\cdot10^{-7}$
0.8	$5.79\cdot10^{-7}$	$8.91\cdot10^{-7}$	$-3.12\cdot10^{-7}$
0.9	$7.45\cdot10^{-7}$	$1.17\cdot10^{-6}$	$-4.22\cdot10^{-7}$
1.0	$8.99\cdot10^{-7}$	$1.43\cdot10^{-6}$	$-5.33\cdot10^{-7}$

表 2 $\eta=0.1$，$a=2.3$，$b=-1.2$，$m=10$ の場合の $h_1(a,b,\eta)$，$h_2(a,b,\eta)$ および $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$

Table 2 $h_1(a,b,\eta)$, $h_2(a,b,\eta)$ and $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$ in the case of $\eta=0.1$, $a=2.3$, $b=-1.2$, $m=10$.

α	$h_1(a,b,\eta)$	$h_2(a,b,\eta)$	$h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$
0.0	$-1.02\cdot10^{-5}$	$-1.19\cdot10^{-5}$	$1.71\cdot10^{-6}$
0.1	$-7.60\cdot10^{-6}$	$-9.32\cdot10^{-6}$	$1.71\cdot10^{-6}$
0.2	$-5.36\cdot10^{-6}$	$-6.84\cdot10^{-6}$	$1.48\cdot10^{-6}$
0.3	$-3.37\cdot10^{-6}$	$-4.46\cdot10^{-6}$	$1.09\cdot10^{-6}$
0.4	$-1.60\cdot10^{-6}$	$-2.19\cdot10^{-6}$	$5.89\cdot10^{-7}$
0.49	$-1.46\cdot10^{-7}$	$-2.15\cdot10^{-7}$	$6.88\cdot10^{-8}$
0.5	$7.80\cdot10^{-9}$	$-9.78\cdot10^{-15}$	$7.80\cdot10^{-9}$
0.51	$1.60\cdot10^{-7}$	$2.14\cdot10^{-7}$	$-5.37\cdot10^{-8}$
0.6	$1.47\cdot10^{-6}$	$2.10\cdot10^{-6}$	$-6.30\cdot10^{-7}$
0.7	$2.81\cdot10^{-6}$	$4.12\cdot10^{-6}$	$-1.31\cdot10^{-6}$
0.8	$4.05\cdot10^{-6}$	$6.06\cdot10^{-6}$	$-2.02\cdot10^{-6}$
0.9	$5.19\cdot10^{-6}$	$7.93\cdot10^{-6}$	$-2.74\cdot10^{-6}$
1.0	$6.25\cdot10^{-6}$	$9.74\cdot10^{-6}$	$-3.48\cdot10^{-6}$

表 3 $\eta=0.1$，$a=0.25$，$b=0.25$，$m=10$ の場合の $h_1(a,b,\eta)$，$h_2(a,b,\eta)$ および $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$

Table 3 $h_1(a,b,\eta)$, $h_2(a,b,\eta)$ and $h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$ in the case of $\eta=0.1$, $a=0.25$, $b=0.25$, $m=10$.

α	$h_1(a,b,\eta)$	$h_2(a,b,\eta)$	$h_1(a,b,\eta)-h_2(a,b,\eta)$
0.0	$-3.33\cdot10^{-4}$	$-5.55\cdot10^{-4}$	$2.23\cdot10^{-4}$
0.1	$-2.56\cdot10^{-4}$	$-4.35\cdot10^{-4}$	$1.78\cdot10^{-4}$
0.2	$-1.85\cdot10^{-4}$	$-3.19\cdot10^{-4}$	$1.34\cdot10^{-4}$
0.3	$-1.19\cdot10^{-4}$	$-2.08\cdot10^{-4}$	$8.93\cdot10^{-5}$
0.4	$-5.73\cdot10^{-5}$	$-1.02\cdot10^{-4}$	$4.46\cdot10^{-5}$
0.49	$-5.45\cdot10^{-6}$	$-1.00\cdot10^{-5}$	$4.56\cdot10^{-6}$
0.5	$1.22\cdot10^{-7}$	0	$1.22\cdot10^{-7}$
0.51	$5.66\cdot10^{-6}$	$9.98\cdot10^{-6}$	$-4.32\cdot10^{-6}$
0.6	$5.39\cdot10^{-5}$	$9.80\cdot10^{-5}$	$-4.41\cdot10^{-5}$
0.7	$1.04\cdot10^{-4}$	$1.92\cdot10^{-4}$	$-8.80\cdot10^{-5}$
0.8	$1.52\cdot10^{-4}$	$2.83\cdot10^{-4}$	$-1.31\cdot10^{-4}$
0.9	$1.96\cdot10^{-4}$	$3.70\cdot10^{-4}$	$-1.74\cdot10^{-4}$
1.0	$2.38\cdot10^{-4}$	$4.54\cdot10^{-4}$	$-2.16\cdot10^{-4}$

$$f_m(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{P^*_{mk} \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \lambda_l t^l}{(k+1)\lambda_{k+1} t^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{P^*_{mk}}{(k+1)\lambda_{k+1} t^k}} \tag{53}$$

となる．ただし，P^*_{mk} はずらしルジャンドル多項式

$$P^*_m(t) = \sum_{k=0}^{m} P^*_{mk} t^k \tag{54}$$

の係数である．式 (14) で与えられる λ_i は，a あるいは $a-b+1$ が負の整数 $-n$ に等しいときには，$i = n+1, n+2, \cdots$ に対して，$\lambda_i = 0$ となるので，式 (53) のままでは分子，分母の除算において不都合が生じる．そこで，不都合を取り除くため，

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_{k+1}} \\ &= (-1)^{m-k} \frac{\Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a+k+1)} \cdot \frac{\Gamma(a-b+m+2)}{\Gamma(a-b+k+2)} \\ &\quad \times \frac{(k+1)!}{(m+1)!}\end{aligned} \tag{55}$$

を定義して次の形にする．

$$f_m(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{P^*_{mk}\gamma_k \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \lambda_l t^l}{(k+1) t^k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{P^*_{mk}\gamma_k}{(k+1) t^k}} \tag{56}$$

上式の分子，分母に t^m を乗じ，t のベキでまとめれば，

$$f_m(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} G_i t^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} H_i t^i} \tag{57}$$

となる．ただし，係数 G_i および H_i は，

$$G_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{P^*_{m,m-i+k}\lambda_k \gamma_{m-i+k}}{(m+1-i+k)} \tag{58}$$

$$H_i = \frac{P^*_{m,m-i}\gamma_{m-i}}{(m+1-i)} \tag{59}$$

である．式 (58) の右辺の和の計算は，桁落ちの可能性があるので多倍長計算で行う必要がある．$U(a,b,x)$ の計算式は次式で与えられる．

$$U(a,b,x) \cong \frac{1}{x^a} \sum_{i=0}^{m} \frac{G_i}{x^i} \Bigg/ \sum_{i=0}^{m} \frac{H_i}{x^i} \tag{60}$$

表 4 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,5,10^{-8})$
Table 4 $\max_R m_{\min}(a,b,5,10^{-8})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	4	4	4	5	5
	[−1,0)	4	4	5	5	6
	[0,1)	4	5	5	7	7
	[1,2)	5	5	7	8	8
	[2,3)	5	6	7	8	9

表 5 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,5,10^{-18})$
Table 5 $\max_R m_{\min}(a,b,5,10^{-18})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	13	13	14	14	15
	[−1,0)	13	13	15	15	16
	[0,1)	14	15	16	17	17
	[1,2)	14	15	17	18	19
	[2,3)	15	16	17	19	20

固定された a，b および x に対して，m を増すと，この計算式の精度は高くなる．そこで，

$m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$： 固定された a，b および x に対して，計算式の精度が要求相対精度 ε を満たす最小の m

と置くことにする．また，漸近展開式の場合と同様に，固定された a，b および m に対して，x を増すと，計算式の精度は高くなることが数値実験より確かめられる．

表 4 および **表 5** には，$x=5$ に対して，a と $a-b+1$ で指定された領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$ を，それぞれ $\varepsilon = 10^{-8}$ と $\varepsilon = 10^{-18}$ の場合について示している．ただし，実際には，$\max_R m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$ は，例えば，領域 $R = \{a : 1 \le a < 2,\ a-b+1 : -1 \le a-b+1 < 0\}$ の場合では，$a = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots\cdots, 1.9$，$a-b+1 = -1.0, -0.9, -0.8, \cdots\cdots, -0.1$ のように 0.1 刻みとして，すべての組み合わせにおける $m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$ のうち，その最大値をもって代用している．**表 6** および **表 7** には，$x=10$ の場合について，**表 8** および **表 9** には，$x=50$ の場合について，同様に $\max_R m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$ を示す．

$-2 \le a < 3$，$-2 \le a-b+1 < 3$ の場合には，計算式 (60) の m として，表 4〜9 のうち，該当するもの（指定された領域の $\max_R m_{\min}(a,b,x,\varepsilon)$）を選べば，与えられた精度以内で，関数値が得られることになる．**図 1** には，指定した a，b，m，x に対して，関数値 $U(a,b,x)$ を求めることができるサブルーチン

```
      SUBROUTINE UFUNC(A,B,M,X,V)
      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
      DIMENSION AK(0:101),OPC(0:101),AKK(0:101),G(0:101),H(0:101)
      AK(0)=1.0Q0
      DO 100 K=1,M+1
      AK(K)=-AK(K-1)*(A+REAL(K-1))*(A-B+REAL(K))/REAL(K)
  100 CONTINUE
      AKK(M)=1.0Q0
      DO 200 K=M-1,0,-1
      AKK(K)=-AKK(K+1)*(A+REAL(K+1))*(A-B+REAL(K+2))/REAL(K+2)
  200 CONTINUE
      CALL SLGD(OPC,M)
      DO 400 I=0,M
      S=0.0Q0
      DO 300 K=0,I
      S=S+OPC(M-I+K)*AK(K)*AKK(M-I+K)/REAL(M+1-I+K)
  300 CONTINUE
      G(I)=S
  400 CONTINUE
      DO 500 I=0,M
      H(I)=OPC(M-I)*AKK(M-I)/REAL(M+1-I)
  500 CONTINUE
      T=1.0Q0/X
      SN=G(M)
      SD=H(M)
      DO 600 I=M-1,0,-1
      SN=SN*T+G(I)
      SD=SD*T+H(I)
  600 CONTINUE
      V=SN/SD*T**A
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SLGD(OPC,M)
      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
      DIMENSION OPC(0:101)
      OPC(0)=(-1.0Q0)**M
      IF(M.EQ.0) RETURN
      DO 100 K=1,M
      OPC(K)=-OPC(K-1)*REAL(M+K)*REAL(M-K+1)/REAL(K*K)
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

図 1 サブルーチン UFUNC (A, B, M, X, V)
Fig. 1 Subroutine UFUNC (A, B, M, X, V).

表 6 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,10,10^{-8})$
Table 6 $\max_R m_{\min}(a,b,10,10^{-8})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	4	4	4	5	5
	[−1,0)	4	4	5	5	6
	[0,1)	4	5	6	6	7
	[1,2)	5	5	6	7	8
	[2,3)	5	6	7	8	8

表 8 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,50,10^{-8})$
Table 8 $\max_R m_{\min}(a,b,50,10^{-8})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	2	2	3	3	3
	[−1,0)	2	2	3	3	3
	[0,1)	3	3	3	4	4
	[1,2)	3	3	4	4	5
	[2,3)	3	3	4	5	5

表 7 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,10,10^{-18})$
Table 7 $\max_R m_{\min}(a,b,10,10^{-18})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	10	10	11	12	12
	[−1,0)	10	11	12	12	13
	[0,1)	11	12	13	14	15
	[1,2)	12	12	14	15	16
	[2,3)	12	13	15	16	16

表 9 各領域 R における $\max_R m_{\min}(a,b,50,10^{-18})$
Table 9 $\max_R m_{\min}(a,b,50,10^{-18})$ in each region R.

		$a-b+1$				
		[−2,−1)	[−1,0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)
a	[−2,−1)	7	7	8	9	10
	[−1,0)	7	8	9	10	10
	[0,1)	8	9	10	11	11
	[1,2)	9	10	11	12	12
	[2,3)	10	10	11	12	13

UFUNC を示す．このサブルーチン UFUNC において，文番号 300 でのループの和の計算で桁落ちが生ずるので，4 倍精度演算を用いている．このプログラムでは，同一の a および b の値で，同じ程度の大きさの x に対して繰り返し使用する場合には，m を適当に指定したとき，2 回目以降，最初の実行文から文番号 500 までを省略できる．また残りの部分（有理式を計算する部分）については，4 倍精度演算をする必要はなく，要求精度を満たす精度の演算（単精度あるいは倍精度）で計算を行えばよい．このような状況では非常に効率的な計算法となる．

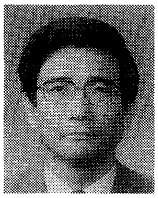
3. おわりに

本論文では，正数 x が大きい場合のクンマー関数 $U(a,b,x)$ の能率的な数値計算法について述べた．

参考文献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.504, Dover, New York (1968).
2) 吉田年雄，二宮市三：x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu,x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.25, No.2, pp.306–312 (1984).
3) 吉田年雄，二宮市三：x が大きい場合の変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.22, No.4, pp.312–319 (1981).
4) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, pp.464–507, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1956).
5) Temme, N.M.: The Numerical Computation of the Confluent Hypergeometric Function $U(a,b,x)$, *Numer. Math.*, Vol.41, pp.63–82 (1983).
6) 1) の p.774.
7) 1) の p.505.
8) 1) の p.786.
9) Luke, Y.L.: *The Special Functions and Their Approximations*, Vol.1, pp.261–263, Academic Press, New York (1969).
10) 1) の p.508.

(平成 7 年 1 月 24 日受付)
(平成 7 年 7 月 7 日採録)



吉田 年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授．昭和 63 年同経営情報学部に配置換．平成 2 年教授．数値解析の研究に従事．特殊関数とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味をもっている．工学博士．電子情報通信学会，日本応用数理学会会員．