抽象書換え系理論による講座配属アルゴリズムの完備性の解析

能 登 正 人[†] 栗 原 正 仁[†] 大 内 東[†]

講座配属とは，卒業研究の指導等のために学生を大学の各講座（研究室）に配属させることを指す．講座配属アルゴリズムは，m 人の学生の各々を n 個の講座のうちの一つに配属するための手続きである．本論文で考察するアルゴリズムは，著者らが実際に用いたアルゴリズムを，理論的考察をしやすいように，単純化かつ抽象化したもので，基本的には，講座と学生の双方の希望に沿って配属を行うようになっている．配属を行う際，配属先の講座には定員があるので，配属希望者数が定員を超過した講座が存在する場合には調整の必要がある．調整するときに，選択する講座は任意のものでよいのでこのアルゴリズムには非決定性がある．もし，この選択の仕方によって最終的に解（配属結果）が違うと，このアルゴリズムには不備があると考えられる．また，解が選択に依存する場合，どのような選択をすべきかを適切に設計するのは難しい．したがって，調整の必要のある講座が複数個存在するとき，どの講座からどのような順番で調整しても得られる結果が同じであることが望まれる．しかし，このことが成り立つかどうかは自明ではない．本論文では，抽象書換え系の理論を用いてこのアルゴリズムの停止性および解の一意性（すなわち完備性）を証明する．

Analysis of Completeness of Laboratory Assignment Algorithm by Abstract Reduction Systems Theory

MASATO NOTO,[†] MASAHITO KURIHARA[†] and AZUMA OHUCHI[†]

Laboratory assignment requires each of the students to be assigned to one of the laboratories of the university for graduation research. In this paper, we consider an algorithm derived from a real procedure by simplification and abstraction to make theoretical consideration easy. Basically this algorithm works in accordance with the wishes of the laboratories and students. It performs an adjustment operation on a laboratory if the number of students wishing to be assigned to the laboratory is greater than the seating capacity of the laboratory. Because any such laboratory can be selected for the adjustment, this algorithm has indeterminacy. The algorithm would be considered inadequate in practice if the solution (computational result) were not unique because of the dependence upon the selection. In that case, it would be difficult to design appropriate selection strategy. Thus, when there are two or more laboratories that need the adjustment, the computational result should be unique, independent of the selection strategies. In this paper, we show that this uniqueness holds for our algorithm, by proving the completeness of the abstract reduction system derived from the algorithm.

1. はじめに

講座配属とは，卒業研究の指導等のために学生を大学の各研究室に配属させることを指す．講座配属アルゴリズムは，m 人の学生の各々を n 個の講座のうちの一つに配属するための手続きである．本論文で考察するアルゴリズムは，著者らが実際に用いたアルゴリズムを，理論的考察をしやすいように，単純化かつ抽象化したもので，基本的には，講座と学生の双方の希望に沿って配属を行うものである．この際，配属先の講座には定員があるので，配属希望者数が定員を超過した講座が存在する場合には調整の必要がある．講座配属のための準備（前提条件）を以下に示す．

(1) 希望講座リスト
各学生は，配属先として希望する順番にすべての講座を並べた希望講座リストを提出する．

(2) 講座ごとの学生順位
各講座 i ごとに学生に優先順位を付け，その結果得られた順序を $>_i$（i は講座）で表す．$x >_i y$ は，講座 i への配属に関して学生 x は学生 y より優先順位が低いことを意味する．

(3) 定員配分
各講座ごとに定員は決まっているものとし，定員の合計は学生数以上である．

以上の準備のもとで，講座配属のアルゴリズムを以

† 北海道大学工学部システム情報工学専攻
Institute of Systems and Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University

下に示す.

1. 全学生を第一希望どおりに仮配属させる.
2. 仮配属学生数が定員を越えている講座が存在する間，以下（2.1 ～ 2.3）を繰り返す.
   2.1 そのような講座 i を任意に一つ選択し，その講座に仮配属されている学生の中から，定員超過分の学生を順序 $>_i$ のもとで優先順位が低い順に選ぶ.（ただし，幸いにも選ばれなかった（定員分の）学生の配属がここで決定するわけではない.）
   2.2 ここで選ばれた学生の希望講座リストから第一希望を削除し，第二希望以下を順次繰り上げて新たに第一希望以下の希望講座リストとする.
   2.3 それらの学生を（新たな）第一希望どおりに仮配属させる.
3. 全員の仮配属を正式な配属と決定する.

ステップ 2.1 ～ 2.3 での調整によりある講座 i の仮配属学生数が一時的に定員と等しくなっても，その後，他講座 j の調整の結果，講座 j から講座 i に仮配属学生が移動してきて，再度，講座 i を調整する必要が有り得ることに注意されたい. なお，ステップ 2.1 で選択する講座は任意のものでよいのでこのアルゴリズムには非決定性がある. もし，この選択の仕方によって最終的に解（配属結果）が違うと，このアルゴリズムには不備があると考えられる. また，解が選択に依存する場合，どのような選択をすべきかを適切に設計するのは難しい. したがって，調整の必要のある講座が複数個存在するとき，どの講座からどのような順番で調整しても得られる結果が同じであることが望まれる. しかし，このことが成り立つかどうかは自明ではない. 本論文では，抽象書換え系（abstract reduction system: ARS）の理論を用いてこのアルゴリズムの停止性および解の一意性（すなわち完備性）を証明する.

本論文の構成は以下のとおりである. 2 章では，計算モデルとして抽象書換え系を扱い，その諸性質について述べる. 3 章では，講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し，その完備性を証明する. 4 章では，講座配属アルゴリズムを実際に適用する際の留意点を補足し，本論文のまとめとする.

2. 抽象書換え系

本章では，抽象書換え系[1),2)]の概要と諸性質について述べる. 抽象書換え系を以下に定義する.

定義 2.1 抽象書換え系は，空でない集合 A と二項関係 $\rightarrow \subseteq A \times A$ から成る対 $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow \rangle$ である. $(a,b) \in \rightarrow$ の代わりに，$a \rightarrow b$ と書き，a は b に 1 ステップで簡約（reduction）されるという.

定義 2.2

(1) $\rightarrow$ の反射推移閉包（reflexive-transitive closure）を $\twoheadrightarrow$ で表す. もし $a \twoheadrightarrow b$ ならば，a は b に簡約されるという.

(2) $\rightarrow$ の推移閉包（transitive closure）を $\rightarrow^+$ で表す.

すなわち，$a \twoheadrightarrow b (a \rightarrow^+ b)$ は a から b への 0 ステップ（1 ステップ）以上の簡約の列 $a \rightarrow \cdots \rightarrow b$ が存在することを表す. もし，$b \rightarrow a$ ならば $a \leftarrow b$ と書くことも可能である. $a \twoheadleftarrow b$ に対しても同様である.

定義 2.3

(1) もし $a \rightarrow b$ なる要素 $b \in A$ が存在しないならば，要素 $a \in A$ は正規形（normal form）である. ある正規形 b に対して $a \twoheadrightarrow b$ であるならば，$a \in A$ は正規形をもつという. $\mathcal{A}$ の正規形の集合を NF $(\mathcal{A})$ あるいは NF $(\rightarrow)$ によって表す.

(2) もし A の要素の無限簡約列 $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots$ が存在しないならば，抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は強正規化性（strongly normalizing: SN）もしくは停止性（termination）を満たす. 言い換えれば，すべての簡約経路がいつかは正規形で終わるということである.

定義 2.4

(1) 任意の $a,b,c \in A$ に対し，$b \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow c$ ならば $\exists d \in A, b \twoheadrightarrow d \twoheadleftarrow c$ であるとき，抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は合流性（confluence）を満たす，もしくは Church-Rosser（CR）性をもつ.

(2) 任意の $a,b,c \in A$ に対し，$b \leftarrow a \rightarrow c$ ならば $\exists d \in A, b \twoheadrightarrow d \twoheadleftarrow c$ であるとき，抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は局所合流性（local confluence）を満たす，もしくは weakly Church-Rosser（WCR）性をもつ.

(3) 停止性と合流性を満たす抽象書換え系は完備（complete）であるという.

合流性と局所合流性を表現するよく知られた図式を**図 1**，**図 2** に示す.

定義 2.5 任意の $a,b,c \in A$ に対し，$b \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow c$ かつ $b,c \in$ NF $(\rightarrow)$ ならば $b = c$ であるとき，抽象書換え系 $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow \rangle$ は，簡約に関して単一正規形（unique normal forms with respect to reduction: $\mathrm{UN}^{\rightarrow}$）をもつという.

本論文の目的は，講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し，その SN 性と $\mathrm{UN}^{\rightarrow}$ 性を示す

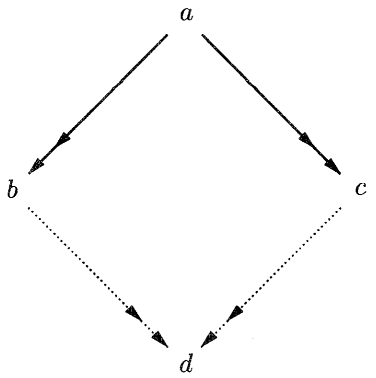


図 1 合流性
Fig. 1 Confluence.

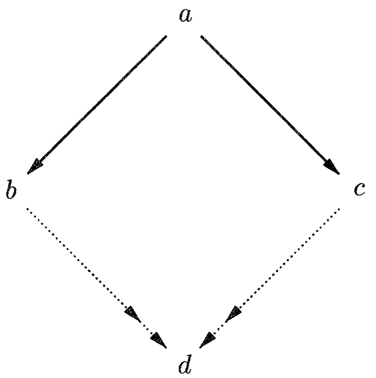


図 2 局所合流性
Fig. 2 Local confluence.

ことである．次の命題は，$\mathrm{UN}^{\rightarrow}$ 性を示すには，CR 性を示すことが十分である[1),2)]ことを示している．

命題 2.1 CR 性をもつ抽象書換え系は，$\mathrm{UN}^{\rightarrow}$ 性を満たす．

要するに，抽象書換え系が完備（SN かつ CR）であることを示せば本論文の目的が達成される．次の命題は，SN 性をもつ系の CR 性を示すためのよく知られた十分条件を述べている．

命題 2.2 (Newman の補題) SN 性を満たす抽象書換え系が WCR 性を満たすならば CR 性も満たす．

3. 講座配属アルゴリズムの完備性

本章では講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し，その完備性（SN かつ CR）を証明する．

3.1 抽象書換え系としての定式化

問題を一般的に扱うために次の記号を用いる．

$S = \{S_1, \ldots, S_m\}$: 学生の集合
$L = \{L_1, \ldots, L_n\}$: 講座の集合

各講座 i ごとに学生に優先順位を付け，その結果得られた順序を $>_i$ （i は講座）で表す．$S_a >_i S_b$ は，講座 i への配属に関して学生 S_a は 学生 S_b より優先順位が低いことを意味する．$>_i$ は厳格全順序 (strict total ordering) とする．すなわち，任意の学生 S_a, S_b, S_c に対し，$>_i$ は以下の条件を満たす．

- $S_a \not>_i S_a$ （非反射性）
- $S_a >_i S_b$ かつ $S_b >_i S_c$ ならば $S_a >_i S_c$ （推移性）
- $S_a \neq S_b$ ならば $S_a >_i S_b$ または $S_b >_i S_a$ （比較可能性）

学生 $s \in S$ の現在の第 i 希望が $\ell_i \in L$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ であることを対 $\langle s, (\ell_1, \ldots, \ell_k) \rangle$, $k > 0$, で表し，学生 s の希望講座リストと呼ぶ．k をこのリストの長さと呼ぶ．アルゴリズムの実行開始の時点では，$k = n$ であり，$(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ は $(L_1, \ldots, L_n)$ のある置換 (permutation) となっている．全学生の希望講座リストをちょうど一つずつ含む集合を（講座配属アルゴリズムの）状態と呼ぶ．すべての状態の集合を状態空間と呼び，Σ で表す．したがって，任意の状態 $\sigma \in \Sigma$ と任意の学生 $s \in S$ に対し，

- $\exists u, \langle s, u \rangle \in \sigma$ （すなわち，σ は学生 s の希望講座リストを含む．）
- $\langle s, u \rangle \in \sigma, \langle s, v \rangle \in \sigma$ ならば $u = v$ （すなわち，σ は学生 s の希望講座リストを二つ以上含まない．）

である．$\langle s, (\ell_1, \ldots, \ell_k) \rangle \in \sigma$ のとき，状態 σ において学生 s は講座 ℓ_1 に仮配属されている．希望講座リスト $t = \langle s, (\ell_1, \ldots, \ell_k) \rangle$ からその時点での第一希望講座を削除したリストを $t' = \langle s, (\ell_2, \ldots, \ell_k) \rangle$ で表す．また，$t'' = (t')' = \langle s, (\ell_3, \ldots, \ell_k) \rangle$ とする．

ところで，このように希望を削除しつづけて，いつかはリストが空になってしまうことがあるのだろうか? 次の命題は，そのようなことがないことを示している．

命題 3.1 アルゴリズムのどの時点においても，希望講座リストは空になることはない．

証明 ある学生 s の希望講座リストがある状態 σ で空 $\langle s, (\,) \rangle \in \sigma$ になったとする．この学生はすべての講座に一度は仮配属され，ステップ 2.2 でそこからはずされたことになる．これは，どの講座も状態 σ に至るある状態で定員を超過したことがあることを意味している．いったん，定員を超過した講座の仮配属学生数はその後，定員未満になることはない．したがって，状態 σ ではすべての講座の仮配属学生数は定員以上である．仮定により，全学生数は定員の合計以下であるから，実際には，全学生数と定員の合計は等しい．したがって，すべての講座の仮配属学生数はちょ

うど定員に等しい．すなわち，全学生の配属はここで決定していることになる．これは学生 s の配属先がないことと矛盾する．□

講座配属アルゴリズムを抽象書換え系 $\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ としてモデル化する．ただし，$\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ のとき $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ は，状態 σ_1 において，定員を超過しているある講座 L_i を選択し，定員超過分の学生を順序 $>_i$ のもとで優先順位が低い順に選び，選んだ学生の希望講座リストから第一希望を削除した状態が σ_2 であることを表す．

ここで，解析の便宜上，アルゴリズム中のステップ 2.1 の「定員超過分」を「1 人」に書き改めた新たなアルゴリズムを導入し，それに対する抽象書換え系を $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ とする．すなわち，$\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ のとき $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は，状態 σ_1 において，定員を超過しているある講座 L_i を選択し，順序 $>_i$ のもとで最も優先順位が低い学生 1 人を選び，選んだ学生の希望講座リストから第一希望を削除した状態が σ_2 であることを表す．$\Rightarrow, \rightarrow$ いずれの場合も，特に，講座 L_i を選択したことを陽に示すために $\sigma_1 \Rightarrow_i \sigma_2, \sigma_1 \rightarrow_i \sigma_2$ などと記すこともある．

命題 3.2

(1) $\sigma \Rightarrow \sigma'$ ならば $\sigma \rightarrow^+ \sigma'$ である．

(2) $\sigma \in \mathrm{NF}\ (\Rightarrow)$ ならば $\sigma \in \mathrm{NF}\ (\rightarrow)$ である．

証明

(1) $\sigma \Rightarrow_i \sigma'$ と仮定する．ただし，ここで選択された講座は L_i であり，定員超過分は k 人 $(k > 0)$ だったとする．このとき，新たなアルゴリズムで L_i を連続して k 回選択すれば k ステップの簡約列 $\sigma \rightarrow_i \cdots \rightarrow_i \sigma'$ を得る．よって，$\sigma \rightarrow^+ \sigma'$ である．

(2) $\sigma \in \mathrm{NF}(\Rightarrow)$ ならば，どの講座も定員を超過していないので，$\sigma \in \mathrm{NF}(\rightarrow)$ である．□

命題 3.3 $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ が完備ならば，$\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ も完備である．

証明 $\rightarrow$ が完備（SN かつ CR）であると仮定する．

もし，$\Rightarrow$ が SN でなければ，無限列 $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \cdots$ が存在し，命題 3.2 (1) より $\sigma_1 \rightarrow^+ \sigma_2 \rightarrow^+ \cdots$ である．これは $\rightarrow$ の SN 性に矛盾する．ゆえに，$\Rightarrow$ は SN である．

$\Rightarrow$ が CR であることを示すために，$\sigma_1 \Leftarrow\!\!\Leftarrow \sigma \Rightarrow\!\!\Rightarrow \sigma_2$ と仮定する．($\Rightarrow\!\!\Rightarrow$ は $\Rightarrow$ の反射推移閉包.) $\Rightarrow$ は SN なので，σ_1, σ_2 の正規形 $\sigma_1', \sigma_2' \in \mathrm{NF}(\Rightarrow)$ が存在する．よって，

$$\mathrm{NF}(\Rightarrow) \ni \sigma_1' \Leftarrow\!\!\Leftarrow \sigma_1 \Leftarrow\!\!\Leftarrow \sigma \Rightarrow\!\!\Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow\!\!\Rightarrow \sigma_2' \in \mathrm{NF}(\Rightarrow).$$

命題 3.2 (1), (2) より，σ_1' と σ_2' は σ の $\rightarrow$ に関しての正規形でもある．すなわち，

$$\mathrm{NF}(\rightarrow) \ni \sigma_1' \leftarrow^+ \sigma \rightarrow^+ \sigma_2' \in \mathrm{NF}(\rightarrow).$$

さらに命題 2.1 より，$\rightarrow$ は $\mathrm{UN}^{\rightarrow}$ 性をもつので，$\sigma_1' = \sigma_2'$ である．よって，$\sigma_1 \Rightarrow\!\!\Rightarrow \sigma_1' = \sigma_2' \Leftarrow\!\!\Leftarrow \sigma_2$ である．ゆえに，$\Rightarrow$ は CR である．□

以下の節において $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ が完備であることを示す．

3.2 $\rightarrow$ の停止（SN）性

命題 3.4 $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は SN 性を満たす．

証明 $\sigma \rightarrow \sigma'$ のとき，σ' に含まれる全希望講座リストの長さの和は，σ のそれに比べて必ず 1 だけ小さい．リストの長さの和は負になることはない．ゆえに，無限簡約列 $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \cdots$ は存在しない．□

3.3 $\rightarrow$ の合流（CR）性

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は SN 性を満たしているので，Newman の補題より，CR 性を満たすことを証明するためには，WCR 性を満たすことを示せばよい．すなわち，$\sigma_1 \leftarrow \sigma \rightarrow \sigma_2$ ならばある σ' が存在し，$\sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma' \twoheadleftarrow \sigma_2$ を示せばよい．

命題 3.5 $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は WCR 性を満たす．

証明 定員を越えている 2 講座 L_i と L_j を任意に選択し，L_i, L_j のみの調整によって合流することを示す．すなわち，$\sigma_1 \leftarrow_i \sigma \rightarrow_j \sigma_2$ ならば $\sigma_1 \twoheadrightarrow_{i,j} \sigma' \twoheadleftarrow_{i,j} \sigma_2$ を示す．ただし，$\twoheadrightarrow_{i,j}$ は $\rightarrow_i \cup \rightarrow_j$ の反射推移閉包である．以下では一般性を失うことなく，$i = 1, j = 2$ と仮定する．

希望講座リストの集合 σ は，σ 中の各リスト内での L_1, L_2 の順位によって，以下の $A \sim E$ の互いに素な五つの集合に分割することができる．

$$A = \{t \in \sigma \mid t = \langle s, (L_1, L_2, \ldots) \rangle\}$$
$$B = \{t \in \sigma \mid t = \langle s, (L_1, \ldots) \rangle\} - A$$
$$C = \{t \in \sigma \mid t = \langle s, (L_2, L_1, \ldots) \rangle\}$$
$$D = \{t \in \sigma \mid t = \langle s, (L_2, \ldots) \rangle\} - C$$
$$E = \sigma - (A \cup B \cup C \cup D)$$

例えば，A は第一希望が L_1 で第二希望が L_2，B は第一希望が L_1 で第二希望が L_2 でない希望講座リストの集合である．

学生間の順序 $>_i$ を希望講座リスト間の順序としても使用できるように，$t_1 = \langle s_1, \cdots \rangle, t_2 = \langle s_2, \cdots \rangle$ が希望講座リストで，$s_1 >_i s_2$ のとき $t_1 >_i t_2$ と定義する．このとき，$t_1 >_i t_2$ ならば $t_1' >_i t_2, t_1 >_i t_2'$，すなわち，第一希望を削除しても順位は不変である．

ここで，一般に

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$$
$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_q\}$$
$$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$$

表 1　命題 3.5 の場合分け
Table 1　Cases for proposition 3.5.

	条　　件	証明図
I	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, c_1 >_1 a_1, a_1 >_2 c_1$	図 3
II	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, c_1 >_1 a_1, c_1 >_2 a_1$	図 4 と対称
III	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, a_1 >_1 c_1, a_1 >_2 c_1$	図 4
IV	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, a_1 >_1 c_1, c_1 >_2 a_1$	図 5
V	$a_1 >_1 b_1, d_1 >_2 c_1, a_1 >_2 d_1$	図 6
VI	$a_1 >_1 b_1, d_1 >_2 c_1, d_1 >_2 a_1$	図 7
VII	$b_1 >_1 a_1, c_1 >_2 d_1$	図 6, 7 と対称
VIII	$b_1 >_1 a_1, d_1 >_2 c_1$	図 8

$$D = \{d_1, d_2, \cdots, d_s\}$$
$$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_t\}$$

ただし,

$$a_1 >_1 a_2 >_1 \cdots >_1 a_p$$
$$b_1 >_1 b_2 >_1 \cdots >_1 b_q$$
$$c_1 >_2 c_2 >_2 \cdots >_2 c_r$$
$$d_1 >_2 d_2 >_2 \cdots >_2 d_s$$

とおく.

この状態を **表 1** の八つに場合分けする．それぞれの場合についてWCR性を示す図の番号もこの表に示している．ただし，II は III において $>_1$ と $>_2$，A と C，B と D の対称性を考慮することによって省略することができる．同様に，VII は V, VI に対称な場合（でつくされること）を考慮することによって省略することができる．

以下では，最も複雑であるケース I（**図 3**）についてのみ説明する．図の矢線の付近にはその簡約に使用した講座と条件を示してある．まず，状態 σ から L_1 講座と L_2 講座についてそれぞれ順序 $>_1, >_2$ に基づき調整していくわけだが，図の左半分の簡約経路について説明していく．L_1 講座を第一希望にしている集合 A, B において $a_1 >_1 b_1$ により a_1 から第一希望が削除され，a'_1 として集合 D に移動し，状態 σ が状態 σ_1 に変化している．第 2 ステップ（L_2 の調整）では，$a_1 >_2 c_1, c_1 >_2 d_1$，$>_2$ の推移性および希望削除による順序の不変性により，$a'_1 >_2 c_1, a'_1 >_2 d_1$ であるから a'_1 が a''_1 として集合 E に移動し，状態 σ_1 が状態 σ'_1 に変化している．第 3 ステップ（L_2 の調整）では，$c_1 >_2 d_1$ により c_1 が c'_1 として集合 B に移動し，状態 σ'_1 が状態 σ''_1 に変化している．第 4 ステップ（L_1 の調整）では，$c_1 >_1 a_1 >_1 a_2$ および $c_1 >_1 a_1 >_1 b_1$ により c'_1 が c''_1 として集合 E に移動し，状態 σ''_1 が状態 σ' に変化している．図の右側についても同様の操作を行うことにより最終的には状態 σ' となり合流することがわかる．ケース I 以外の図についても，同様に，$\sigma_1 \twoheadrightarrow \sigma' \twoheadleftarrow \sigma_2$ を確認することができる．

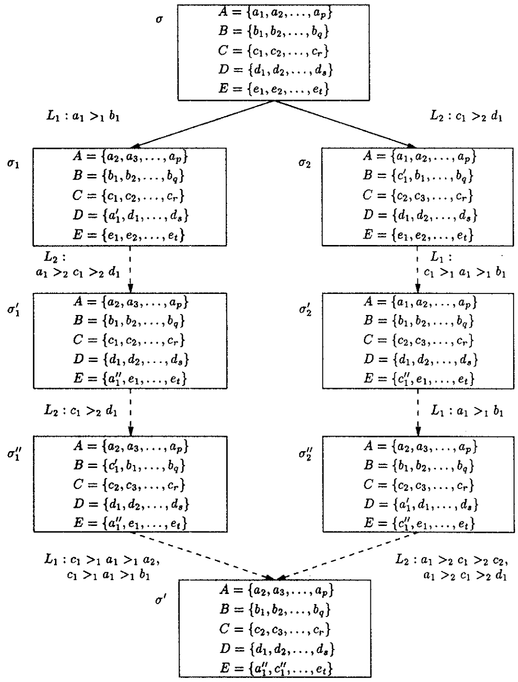


図 3　ケース I（$c_1 >_1 a_1 >_1 b_1$; $a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$）
Fig. 3　Case I ($c_1 >_1 a_1 >_1 b_1$; $a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$).

以上では，暗黙に $p, q, r, s > 0$ と仮定したが，それぞれが 0 の場合も同様である．そのことを以下に補足しておく．p, q, r, s が 0 か否かの組合せは全部で $2^4 = 16$ 通りある（**表 2**）．表中の 0 は 0 を表し,—は 0 でないことを表す．

調整を行う前提条件として，定員を超過している 2 講座に着目して調整を行っているので，$p + q > 0, r + s > 0$ でなければならない．したがって，表 2 の 4,8,12 ～ 16 の 7 通りについては除外して考える．また，表 2 の 1 は既に証明済である．よって，残りの 8 通りについて考える．

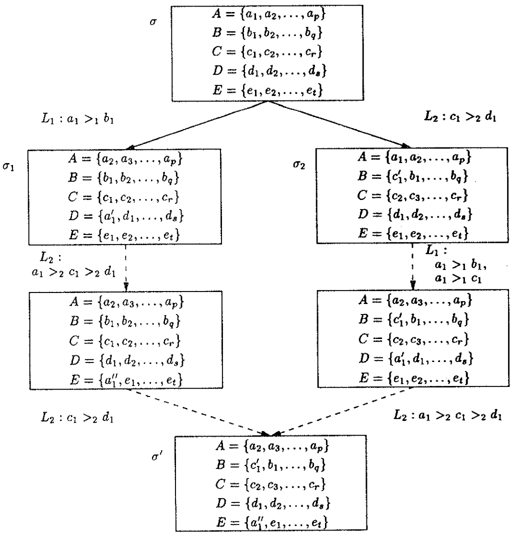


図4 ケースIII ($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1$; $a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$)
Fig. 4 Case III ($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1$; $a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$).

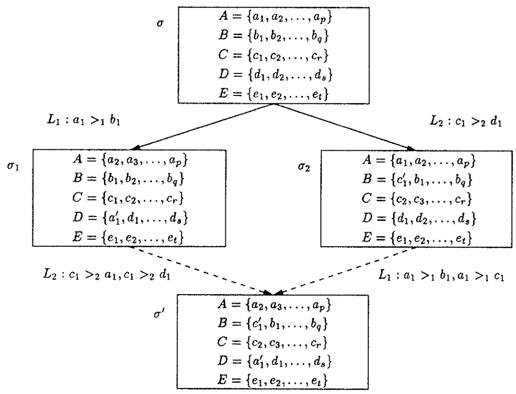


図5 ケースIV ($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1$; $c_1 >_2 a_1, c_1 >_2 d_1$)
Fig. 5 Case IV
($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1$; $c_1 >_2 a_1, c_1 >_2 d_1$).

まず，$p=0$ ($q \neq 0$) のときだが，この場合 L_1 講座の調整によって移動するのは，集合 B の要素であるので，$b_1 >_1 a_1$ の場合と同じく考えることができる．同様に，$q=0$ のときは，$a_1 >_1 b_1$ と同じ，$r=0$ のときは，$d_1 >_2 c_1$ と同じ，$s=0$ のときは，$c_1 >_2 d_1$ と同じである．これらが，表1のI～VIIIのどれを参照すればよいかを 表2の備考欄に示してある．

ゆえに，$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ はWCR性を満たす．□

定理 3.1 $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は完備である．

証明 命題 3.4, 3.5, 2.2 より明らか．□

定理 3.2 $\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ は完備である．

証明 命題 3.3，定理 3.1 より明らか．□

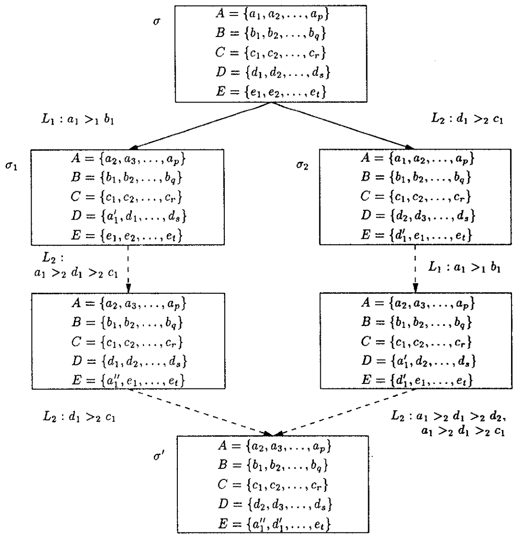


図6 ケースV ($a_1 >_1 b_1$; $a_1 >_2 d_1 >_2 c_1$)
Fig. 6 Case V ($a_1 >_1 b_1$; $a_1 >_2 d_1 >_2 c_1$).

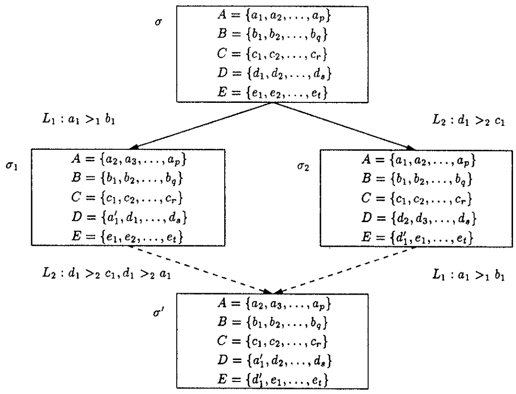


図7 ケースVI ($a_1 >_1 b_1$; $d_1 >_2 c_1, d_1 >_2 a_1$)
Fig. 7 Case VI ($a_1 >_1 b_1$; $d_1 >_2 c_1, d_1 >_2 a_1$).

4. おわりに

本論文では，講座配属アルゴリズムの完備性すなわち停止性と解の一意性を抽象書換え系の理論により示した．

この種の人員配置問題に関連した研究としては，クラス編成問題[3]がある．クラス編成問題では，配属される学生の希望をできるだけ満たすために，数理計画的アプローチにより解かれている．具体的には，オペレーションズ・リサーチ（OR）の分野で用いられている線形計画法により学生集団の満足度を最大にすることによって，全学生を配属するようになっている．

本論文で考察したアルゴリズムは,「集団の満足度」なるものを仮定しておらず，各学生の希望と各講座ご

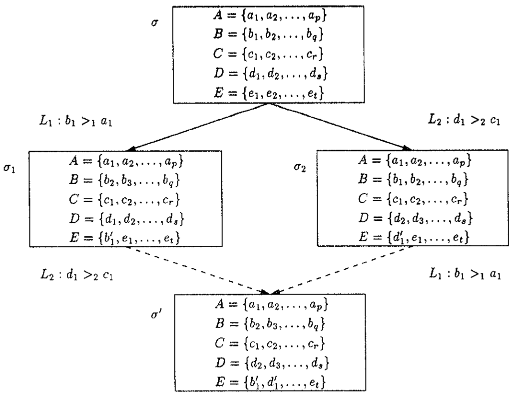


図8 ケースVIII ($b_1 >_1 a_1$; $d_1 >_2 c_1$)
Fig. 8 Case VIII ($b_1 >_1 a_1$; $d_1 >_2 c_1$).

表2 p, q, r, s が0か否かの場合分け
Table 2 Cases where at least one of p, q, r, s is zero.

	p	q	r	s	備 考
1	—	—	—	—	
2	—	—	—	0	I ～ IV, VII
3	—	—	0	—	V, VI, VIII
4	—	—	0	0	
5	—	0	—	—	I ～ VI
6	—	0	—	0	I ～ IV
7	—	0	0	—	V, VI
8	—	0	0	0	
9	0	—	—	—	VII, VIII
10	0	—	—	0	VII
11	0	—	0	—	VIII
12	0	—	0	0	
13	0	0	—	—	
14	0	0	—	0	
15	0	0	0	—	
16	0	0	0	0	

との学生順位 $>_i$ のみを仮定して，ある意味では個人主義的に配属を決めている．このアルゴリズムを実際に適用する際の（情報処理上の）留意点を以下に示す．

(1) 希望講座リスト
各学生は，実際には全講座を順位付けする必要はない．例えば，初回のリスト提出時には第三希望まで示し，必要に応じて第四希望以降を漸増的（incremental）に追加していってもよい．

(2) 講座ごとの学生順位
全講座が全学生についてあらかじめ順位付けをする必要はない．とりあえず，調整が必要となった講座 i に対して，調整にかかわる関係学生のみ比較して $>_i$ の一部を決定する．以後は，漸増的に $>_i$ を拡張していく．$>_i$ を決めるための要因としては

- 講座 i の研究内容に密接に関係する科目の成績
- 講座 i への配属の希望の度合（希望講座リスト中の順位）
- 抽選
- 学生どうしの話し合い

などの一つ，あるいはいくつかの組合せが考えられる．

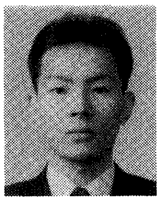
(3) 定員配分
定員は提出された希望講座リストを見た後に，希望数の多寡に応じて決定してもよい．

謝辞 本研究を進めるにあたり，貴重な御意見をいただいた室蘭工業大学の山口忠教授に感謝いたします．また，本論文に対し査読者の方々からは貴重なコメントをいただきました．ここに記し，感謝いたします．

参 考 文 献

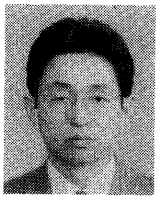
1) Dershowitz, N. and Jouannand, J.P.: 書換え系，コンピュータ基礎理論ハンドブック II, pp. 243–321, 丸善 (1994).
2) 井田哲雄: 計算モデルの基礎理論, pp. 223–296, 岩波書店 (1991).
3) 今野　浩: 数理決定法入門 キャンパスの OR, pp. 1–20, 朝倉書店 (1992).

(平成7年2月9日受付)
(平成7年7月7日採録)



能登　正人（学生会員）
1967年生．1991年北海学園大学工学部電子情報工学科卒業．1993年北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．現在，同博士課程在学中．システム工学，項書換え系などの研究に従事．電子情報通信学会，日本ファジィ学会，計測自動制御学会各会員．

栗原　正仁（正会員）
1955年生．1978年北海道大学工学部電気工学科卒業．1980年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．現在，北海道大学工学部システム情報工学専攻助教授．工学博士．人工知能，項書換え系などの研究に従事．電子情報通信学会，日本ソフトウェア科学会，人工知能学会，EATCS（欧州理論計算機科学会）各会員．



大内　東（正会員）

1945年生．1974年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了．現在，北海道大学工学部システム情報工学専攻教授．工学博士．システム情報工学，応用人工知能システム，医療システムなどの研究に従事．電子情報通信学会，日本ファジィ学会，計測自動制御学会，人工知能学会，電気学会，日本OR学会，医療情報学会，病院管理学会，IEEE-SMC 各会員．