

ベジエ形式曲面の法線ベクトルとその存在域

山口 泰†

曲面の1階微分量である法線ベクトルは、曲面間交線計算、NC工具の方向決定、組立て性の判定、オフセット曲面の計算等、様々な応用に直接結び付いている。一方、自由曲線や自由曲面の表現としては、ベジエ曲線およびベジエ曲面が、その優れた性質から広く用いられている。このベジエ曲線ないし曲面の場合には、1階微分量である接ベクトルの軌跡、すなわちホドグラフが、それぞれベジエ曲線ないしベジエ曲面として表現できることが知られている。つまり、接ベクトルに関しては、ベジエ制御点網によって非常に厳しい存在領域が与えられる。しかし、曲面の法線ベクトルについては、それほど厳しい存在域を示すことができず、従来は円錐、4角錐、6角錐等で包絡するにとどまっていた。本研究では、 $n \times m$ 次のテンソル積ベジエ曲面の非正規化法線ベクトルが $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積ベジエ曲面、 n 次の三角形ベジエ曲面の非正規化法線ベクトルが $(2n-2)$ 次の三角形ベジエ曲面、としてそれぞれ表現できることを明らかにし、これら法線ベクトルのベジエ制御点の計算式を示す。最後に法線ベクトルのベジエ曲面をもとにして、法線ベクトルのより厳しい存在域計算方法を提案する。

Normal Vectors of Bézier Type Surfaces and Their Bounds

YASUSHI YAMAGUCHI†

Normal vectors of a surface are directly related to a lot of applications, such as surface-surface intersection, tool orientation for NC machining, assemblability of components, offset surface generation, and so on. Bézier curves and surfaces are commonly used by many applications because of their good properties. It is well known that hodographs of Bézier curves and surfaces, which are loci of tangent vectors, can be represented as Bézier curves and surfaces respectively. Therefore, tight bounds of tangent vectors of Bézier curves and surfaces can be obtained. However, bounds of normal vectors are usually approximated by cones, rectangular pyramids and hexagonal pyramids, because it is impossible to calculate such tight bounds of normal vectors of Bézier curves and surfaces as those of tangent vectors. This paper presents that unnormalized normal vectors of a tensor product Bézier surface of degree $n \times m$ can be represented as a tensor product Bézier surface of degree $(2n-1) \times (2m-1)$ and also that unnormalized normal vectors of a triangular Bézier surface of degree n can be represented as a triangular Bézier surface of degree $2n-2$. The equations for calculating the control points of those Bézier normal vector surfaces are also presented. Furthermore, the method for determining tight bounds of normal vectors based on the Bézier normal vector surfaces is proposed.

1. はじめに

CAD/CAMを始めとする多くの計算機アプリケーションにおいて形状処理は中核技術のひとつとなっている。しかし、自由曲面の処理技術にはいまだ多くの問題が残されており、様々な研究がなされている。なかでもベジエ形式の曲線・曲面はその優れた特徴から、標準的な自由曲線・曲面の表現法のひとつとなっている。その優れた特徴としては、細分割性、アフィン不変性、凸包性、変動減少性、端点一致性等の性質があ

る。これに加えて、ベジエ曲線の場合には、ホドグラフがあげられる。ホドグラフとは、曲線の接ベクトルの始点を原点においたときの終点の描く軌跡であり、曲線の1階微分の性質を表したものである。 n 次ベジエ曲線の場合には、ホドグラフが $n-1$ 次のベジエ曲線となることが知られている¹⁾。この性質は、曲線の接続問題や交点位置の探索²⁾等に非常に有用である。ベジエ曲面の場合にも、曲面の u 方向および v 方向の接ベクトルの軌跡は、同様にベジエ曲面となることが知られている。

さて、曲面の1階微分として基本的な量である法線ベクトルは、曲面間交線計算、NC工具の方向決定、組立て性の判定、オフセット曲面の計算等、様々な応

† 東京大学教養学部

Graduate School of Arts and Sciences, The University of Tokyo

用に直接結び付いている。ベジエ曲面の法線ベクトルは、正規化したものは一般に多項式で表現できないが、正規化せずに適当な大きさを持ったベクトルとして考えると、一定次数の多項式で表現できることが知られている。たとえば、元の曲面が $n \times m$ 次のテンソル積曲面であった場合に、その法線ベクトルは $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積多項式で表現可能である³⁾。しかし、正規化されていない法線ベクトルについても、接ベクトルのホドグラフのように概形を得て、その存在域を示すことはできなかった。また、ベジエ曲線の自然な拡張である三角形ベジエ曲面¹⁾の場合には、法線ベクトルの表現式について明確に議論されることはなかった。

したがって、従来は法線ベクトルの存在域を円錐²⁾や4角錐⁴⁾、6角錐⁵⁾等で包絡するにとどまっていた。本研究では、 $n \times m$ 次のテンソル積ベジエ曲面の正規化されていない法線ベクトルが $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積ベジエ曲面として表現できること、また n 次の三角形ベジエ曲面の場合には $(2n-2)$ 次の三角形ベジエ曲面として表現できることを明らかにし、法線ベクトルを表現するベジエ曲面の制御点の計算式を示す。最後に法線ベクトルのベジエ曲面をもとに、より厳しい法線ベクトルの存在域の計算方法を提案する。

2. 法線ベクトルと交線計算

本節では法線ベクトルと交線計算法の関係について説明する。自由曲面を扱うにあたって、曲面間の交線計算は必要不可欠な処理技術であり、従来より様々な手法が提案されてきた⁶⁾。一般に自由曲面の表現法として用いられるパラメトリック曲面では交線は非常に高次の曲線になるため、交線を代数的に求めることは原理的にほとんど不可能であり、交線上の点列を算出するという近似解法を採用することになる。

自由曲面間の交線近似解法には、再帰分割法や交線追跡法がある。再帰分割法⁷⁾は、交差する2曲面を平面近似できるまで再帰的に分割し、微小な平面要素どうしの交線として計算する方法である。平面近似の精度を上げるためには、曲面を非常に細かく分割する必要があり、莫大なメモリと計算時間を要する。一方、あまりに平面近似の精度を下げてしまうと計算が非常に不安定になる。交線追跡法⁸⁾は、交線上の1点をもとに同じ交線上のすぐそばの点を求めることを繰り返して、交線を追跡する方法である。多くの場合、追跡の計算は安定かつ高速に実行できるため、交線計算法として有望視されている。しかし、交線が複数存在する際に独立したすべての交線上の初期点を得ること、

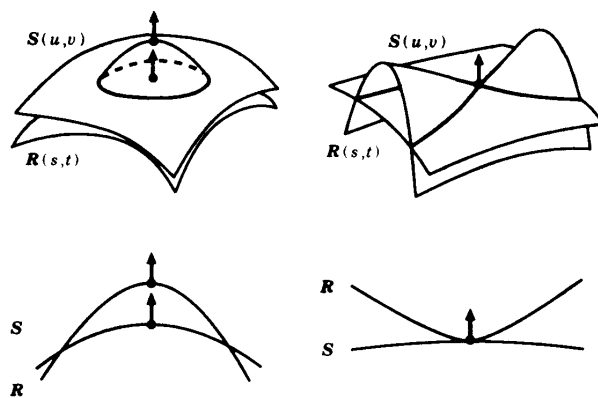


図1 臨界点
Fig. 1 Critical points.

特異点近傍でも安定して交線を追跡すること、等の問題が残されている。

これらの交線追跡法における問題は、2曲面上で共通法線を持つ点である「臨界点」に密接な関わりがある。第1の初期点算出の問題は、一般にループ探索の問題として帰着される。つまり、すべての交線ループを見つけたうえで、これらがループをなさなくなるように曲面を分割すれば、分割された部分曲面の境界上で必ず初期点を得られる。Cheng は曲面間の距離の勾配ベクトル場を定義することによって、図1左のように交線ループの内部には必ず臨界点が存在することを示した⁹⁾。また第2の問題である特異点は、図1右のように、交線上の点でありかつ臨界点でもある点である。このようにいずれの問題においても臨界点の算出が解決の糸口となることが分かっている。

臨界点が共通法線を持つ点であるという定義から、臨界点が存在する2曲面は必ず平行な法線ベクトルを持つ。つまり、臨界点の存在する条件として、2曲面の全法線ベクトルを単位球に投影したガウスマップどうしが重なることがあげられる¹⁰⁾。しかし、曲面法線ベクトルのガウスマップを求めることは一般に困難である。Sederberg らはループ探索の観点からベジエ曲面の接平面円錐を計算する手法を示した²⁾。この方法はベジエ曲面の u 方向および v 方向の接ベクトルの軌跡であるホドグラフがベジエ曲面となることを利用するもので、それぞれのホドグラフを内包する円錐を独立に求め、2つの円錐から接平面円錐を求める。 u 方向と v 方向を独立に計算し、なおかつ円錐で近似していることから、接平面や法線ベクトルを包絡するものとしては非常に緩いものにならざるをえなかった。Kriezis らは Sederberg らの手法を改良し、円錐の代わりに4角錐を用いて、より厳しい条件を導く手法を示した⁴⁾。また、Hohmeyer は u 方向と v 方向の2つ

のホドグラフから線形計画法を用いることによって、法線ベクトルの存在域を六角錐で包絡する手法を示した⁵⁾。しかし、これらの手法もガウスマップを4角錐や六角錐で近似的に包絡するものでしかなく、効率上の問題も残されていた。

3. テンソル積ベジエ曲面の法線ベクトル曲面

曲面の法線ベクトルの始点を原点に一致させたとき、ベクトルの終点が描く曲面を法線ベクトル曲面と呼ぶことにする。一般に法線ベクトルというと、その向きのみ注目するために正規化されたベクトルを考慮することが多い。本研究では単に法線ベクトルというときには正規化されていないベクトルとし、正規化されたものを単位法線ベクトルと呼んで区別することとする。ちなみに、単位法線ベクトルの張る法線ベクトル曲面はガウスマップにほかならない。

さて、 $n \times m$ 次のテンソル積ベジエ曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ は、 $(n+1) \times (m+1)$ 個の制御点 \mathbf{P}_{ij} によって定められ、次のように表現される。

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{P}_{ij} \quad (1)$$

ここで $B_i^n(u)$ はいわゆるバーンスタイン多項式であり、次式で定義される。

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\ = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2)$$

この式(2)は、次のように変形できる。

$$\frac{B_i^n(u)}{\binom{n}{i}} = u^i (1-u)^{n-i}$$

したがって、次のようなバーンスタイン多項式の積の式が成り立つ。

$$\frac{B_i^n(u)}{\binom{n}{i}} \frac{B_j^m(v)}{\binom{m}{j}} = \frac{B_{i+j}^{n+m}(u, v)}{\binom{n+m}{i+j}} \quad (3)$$

さて、式(1)で表現されるテンソル積ベジエ曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ の u, v 方向の接ベクトル $\mathbf{S}_u(u, v)$, $\mathbf{S}_v(u, v)$ は次式で与えられる¹⁾。

$$\mathbf{S}_u(u, v) = n \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{L=0}^m B_K^{n-1}(u) B_L^m(v) \mathbf{Q}_{KL}$$

$$\text{ただし } \mathbf{Q}_{K L} = \mathbf{P}_{(K+1) L} - \mathbf{P}_{K L}$$

$$\mathbf{S}_v(u, v) = m \sum_{M=0}^n \sum_{N=0}^{m-1} B_M^n(u) B_N^{m-1}(v) \mathbf{R}_{MN}$$

$$\text{ただし } \mathbf{R}_{M N} = \mathbf{P}_{M (N+1)} - \mathbf{P}_{M N}$$

曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ の法線ベクトル $\mathbf{N}(u, v)$ は、接ベクトル $\mathbf{S}_u(u, v)$, $\mathbf{S}_v(u, v)$ の共通法線であるから、バーンスタイン多項式の積の式(3)を用いると、次のようになる。

$$\mathbf{N}(u, v) \\ = \mathbf{S}_u(u, v) \times \mathbf{S}_v(u, v) \\ = nm \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{L=0}^m \sum_{M=0}^n \sum_{N=0}^{m-1} \{ B_K^{n-1}(u) B_L^m(v) \\ B_M^n(u) B_N^{m-1}(v) \mathbf{Q}_{KL} \times \mathbf{R}_{MN} \} \\ = nm \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{M=0}^n \sum_{L=0}^m \sum_{N=0}^{m-1} \left\{ \frac{\binom{n-1}{K} \binom{n}{M} \binom{m}{L} \binom{m-1}{N}}{\binom{2n-1}{K+M} \binom{2m-1}{L+N}} \right. \\ \left. B_{K+M}^{2n-1}(u) B_{L+N}^{2m-1}(v) \mathbf{Q}_{KL} \times \mathbf{R}_{MN} \right\} \quad (4)$$

式(4)は、 $2n-1$ 次と $2m-1$ 次のバーンスタイン多項式の積になっている。このことは、式(1)で与えられるベジエ曲面の法線ベクトル曲面 $\mathbf{N}(u, v)$ が、以下の $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積ベジエ曲面として表現できることを示している。

$$\mathbf{N}(u, v) = \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2m-1} B_i^{2n-1}(u) B_j^{2m-1}(v) \mathbf{N}_{ij} \quad (5)$$

この曲面をベジエ法線ベクトル曲面と呼ぶことにする。式(4)と式(5)の係数を比較することにより、各制御点 \mathbf{N}_{ij} は次式で与えられる。

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{nm}{\binom{2n-1}{i} \binom{2m-1}{j}} \sum_{\substack{K+M=i \\ 0 \leq K \leq n-1 \\ 0 \leq M \leq n}} \sum_{\substack{L+N=j \\ 0 \leq L \leq m \\ 0 \leq N \leq m-1}} \{ \binom{n-1}{K} \binom{n}{M} \binom{m}{L} \binom{m-1}{N} \mathbf{Q}_{KL} \times \mathbf{R}_{MN} \}$$

図2にテンソル積ベジエ曲面とその法線ベクトル曲面を示す。上図は、 4×3 次のテンソル積ベジエ曲面と曲面上の法線ベクトルを示したものである。太線は曲面の制御点群を表している。下図は、このベジエ曲面の法線ベクトルと式(5)によって与えられる法線ベクトル曲面を示している。法線ベクトル曲面は、 7×5 次のテンソル積ベジエ曲面となっており、制御点群を太線で表示している。

4. 三角形ベジエ曲面の法線ベクトル曲面

三角形ベジエ曲面について説明する前に、まず2次元(平面)上の重心座標表現およびバーンスタイン多項式について述べる。2次元の重心座標表現とは、2次元空間を張る3つの基準点 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ に対する点 \mathbf{Q} の

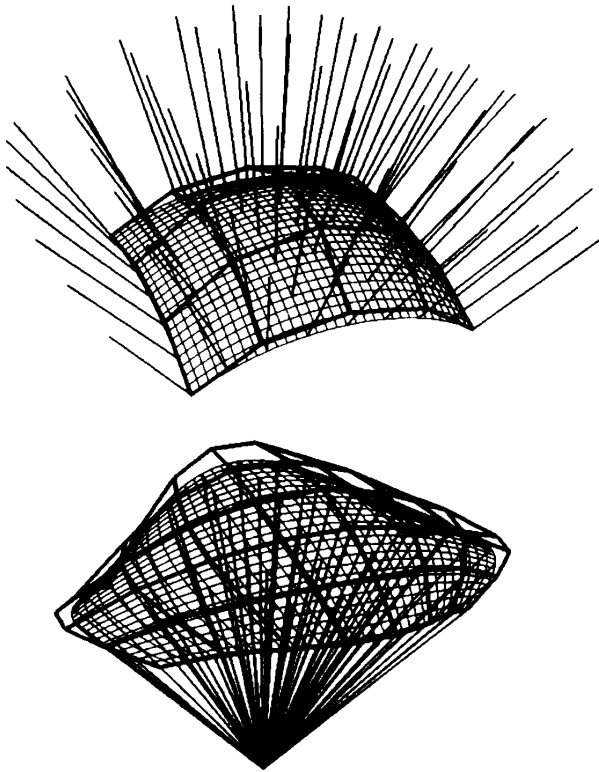


図2 テンソル積ベジエ曲面と法線ベクトル曲面

Fig. 2 A tensor product Bézier surface and its normal vector surface.

相対的位置を表すもので、 $\mathbf{Q} = u_1 \mathbf{Q}_1 + u_2 \mathbf{Q}_2 + u_3 \mathbf{Q}_3$ となる $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (ただし $|\mathbf{u}| = u_1 + u_2 + u_3 = 1$) を2次元上の重心座標と呼ぶ。重心座標表現を用いると、以下のように2次元上の n 次のバーンスタイン多項式を定義できる。

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} = \frac{n!}{i_1! i_2! i_3!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ は $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + i_3 = n$ を満たす3つの数字からなる添字である。式(6)は式(2)の自然な拡張となっていることが分かる。この式(6)は、次のように変形できる。

$$\frac{B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\binom{n}{\mathbf{i}}} = u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3}$$

したがって、次のようなバーンスタイン多項式の積の式が成り立つ。

$$\frac{B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})}{\binom{n}{\mathbf{i}}} \frac{B_{\mathbf{j}}^m(\mathbf{u})}{\binom{m}{\mathbf{j}}} = \frac{B_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}^{n+m}(\mathbf{u})}{\binom{n+m}{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} \quad (7)$$

バーンスタイン多項式の定義式(6)を用いて、 n 次の三角形ベジエ曲面は、以下のように定義される¹⁾。

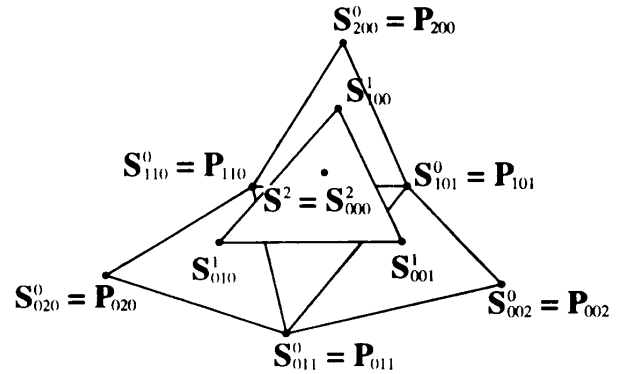


図3 三角形ベジエ曲面の再帰的定義

Fig. 3 Recursive definition of a triangular Bézier surface.

$$\mathbf{S}^n(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) \mathbf{P}_{\mathbf{i}} \quad (8)$$

この三角形ベジエ曲面は、次のように再帰的に定義することもできる。

$$\mathbf{S}_{\mathbf{i}}^r(\mathbf{u}) = u_1 \mathbf{S}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_1}^{r-1}(\mathbf{u}) + u_2 \mathbf{S}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_2}^{r-1}(\mathbf{u}) + u_3 \mathbf{S}_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_3}^{r-1}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

ただし、 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ であり、 $\mathbf{S}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{S}_{\mathbf{0}}^n(\mathbf{u})$, $\mathbf{S}_{\mathbf{i}}^0(\mathbf{u}) = \mathbf{P}_{\mathbf{i}}$ である。この再帰的な関係を2次の三角形ベジエ曲面について示したものが、図3である。

さて、三角形ベジエ曲面の重要な性質として、3点 $\mathbf{S}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u})$, $\mathbf{S}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u})$, $\mathbf{S}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})$ が $\mathbf{S}^n(\mathbf{u})$ における接平面をなすことがあげられる。すなわちこれら3点の張る平面の法線ベクトルと $\mathbf{S}^n(\mathbf{u})$ における法線ベクトルは一致する。共線でない3点 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ が与えられたとき、次式によって得られるベクトル $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3)$ は $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ の張る平面に直交する。

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3) = (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1) \times (\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_1) = \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_3 \times \mathbf{Q}_1$$

したがって、点 $\mathbf{S}^n(\mathbf{u})$ における法線ベクトル $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ は、式(8)と式(9)に2次元のバーンスタイン多項式の積の式(7)を用いて、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{u}) &= \mathbf{M}(\mathbf{S}_{\mathbf{e}_1}^{n-1}(\mathbf{u}), \mathbf{S}_{\mathbf{e}_2}^{n-1}(\mathbf{u}), \mathbf{S}_{\mathbf{e}_3}^{n-1}(\mathbf{u})) \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=n-1} \sum_{|\mathbf{l}|=n-1} \{ B_{\mathbf{k}}^{n-1}(\mathbf{u}) B_{\mathbf{l}}^{n-1}(\mathbf{u}) (\mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_2} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_2} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_3} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_3} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_1}) \} \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=n-1} \sum_{|\mathbf{l}|=n-1} \left\{ \frac{\binom{n-1}{\mathbf{k}} \binom{n-1}{\mathbf{l}}}{\binom{2n-2}{\mathbf{k}+\mathbf{l}}} B_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}^{2n-2}(\mathbf{u}) (\mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_2} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_2} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_3} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_3} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_1}) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

このように式 (10) は, $(2n-2)$ 次のバーンスタイン多項式となる. すなわち, 式 (8) で与えられる三角形ベジエ曲面の法線ベジエ曲面 $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ は, 次の $(2n-2)$ 次の三角形ベジエ曲面として表現可能である.

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \sum_{|i|=2n-2} B_i^{2n-2}(\mathbf{u})\mathbf{N}_i \quad (11)$$

ここで, 法線ベクトル曲面の各制御点 \mathbf{N}_i は, 式 (10) と式 (11) の係数を比較することにより, 次のように与えられる.

$$\mathbf{N}_i = \sum_{\substack{\mathbf{k}+\mathbf{l}=\mathbf{i} \\ |\mathbf{k}|=n-1 \\ |\mathbf{l}|=n-1}} \left\{ \frac{\binom{n-1}{\mathbf{k}} \binom{n-1}{\mathbf{l}}}{\binom{2n-2}{\mathbf{i}}} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_1} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_2} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_2} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_3} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_3} \times \mathbf{P}_{\mathbf{l}+\mathbf{e}_1}) \right\}$$

図 4 に三角形ベジエ曲面とその法線ベクトル曲面を示す. 上図は, 3 次の三角形ベジエ曲面と曲面上の法線ベクトルを示したものである. 太線は曲面の制御点群を表している. 下図は, このベジエ曲面の法線ベクトルと式 (11) によって与えられる法線ベクトル曲面を示している. 法線ベクトル曲面は, 4 次の三角形ベジエ曲面となっており, 制御点群を太線で表示している.

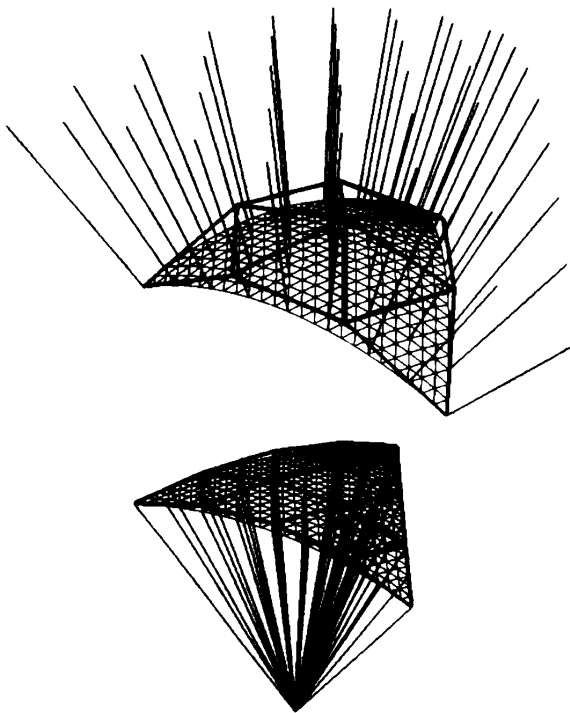


図 4 三角形ベジエ曲面と法線ベクトル曲面

Fig. 4 A triangular Bézier surface and its normal vector surface.

5. ベジエ法線ベクトル曲面の性質と存在域の計算

式 (5) および式 (11) から明らかなように, テンソル積ベジエ曲面および三角形ベジエ曲面のいずれについても, 正規化されていない法線ベクトルの軌跡すなわち法線ベクトル曲面は, ベジエ形式の曲面として表現できる. したがって, これらの法線ベクトル曲面は, 以下の性質を持つ.

- (1) 細分割
法線ベクトル曲面 $\mathbf{N}(u, v)$ ないし $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ は de Casteljau アルゴリズムにより, 任意の u または v あるいは \mathbf{u} において細分割できる.
- (2) アフィン不変性
元の曲面 $\mathbf{S}(u, v)$ ないし $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ と, それから作られる法線ベクトル曲面 $\mathbf{N}(u, v)$ ないし $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ とは, ともにアフィン変換に関して不変である. したがって, 法線ベクトル曲面の制御点群 $\{\mathbf{N}_{ij}\}$ ないし $\{\mathbf{N}_i\}$ を求めてから細分割したものと, 元の曲面を細分割してから求めた法線ベクトル曲面の制御点とは一致する.
- (3) 凸包性
法線ベクトル曲面 $\mathbf{N}(u, v)$ ないし $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ は, 制御点群 $\{\mathbf{N}_{ij}\}$ ないし $\{\mathbf{N}_i\}$ の凸包に含まれる.
この 3 番目の凸包性を利用することによって, 法線ベクトルの存在域を厳しく包絡できる. つまり, 曲面の法線ベクトルは, 原点を頂点とし制御点群 $\{\mathbf{N}_{ij}\}$ ないし $\{\mathbf{N}_i\}$ から構成される凸多角錐によって厳しく包絡される. ここでは, この凸多角錐の算出方法について論じる.
まず, 凸多角錐の存在条件について考える. この凸多角錐は原点を含む平面が構成する半空間の積である. したがって, 制御点群 $\{\mathbf{N}_{ij}\}$ ないし $\{\mathbf{N}_i\}$ の張る凸包を内包する凸多角錐が存在するためには, 原点が凸包内に存在してはならない. つまり, 図 5 の左の状況では凸多角錐が存在するが, 図 5 の右の状況では凸多

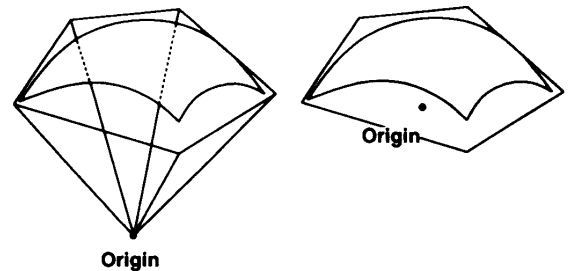


図 5 凸多角錐の存在条件

Fig. 5 Condition for convex cone existence.

角錐は存在しない。さらに原点が制御点群 $\{N_{ij}\}$ ないし $\{N_i\}$ の張る凸包の外部にある場合には、凸多角錐の側面は、原点から凸包を眺めたときの輪郭線および原点によって張られる平面群となる。多面体において輪郭線となる稜線は、その両隣の面が、視点に対して一方は表向き、他方は裏向きとなるものである。そこで、凸包の各面の位置および法線ベクトルから、それぞれの面が原点に対して、表裏いずれの向きになるかを計算することによって、すべての輪郭線を抽出できる。

図6は、図2のテンソル積ベジエ曲面について、その法線ベクトルの存在域を包絡する凸多角錐を求めた結果である。細線はベジエ法線ベクトル曲面の制御点群によって張られる凸包を示し、太線と網によって凸多角錐を示している。図7は、同様に図4の三角形ベジエ曲面について、その法線ベクトルの存在域を包

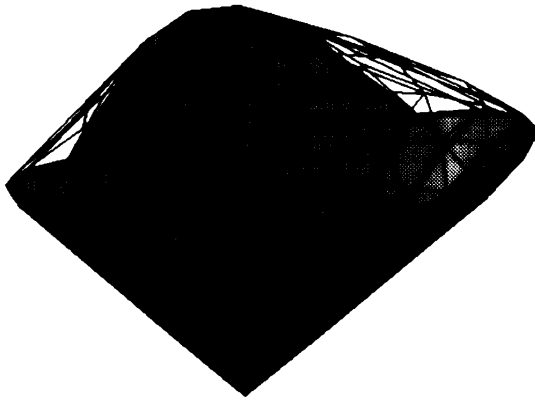


図6 テンソル積ベジエ曲面の法線ベクトルの存在域
Fig. 6 A normal vector bound of a tensor product Bézier surface.

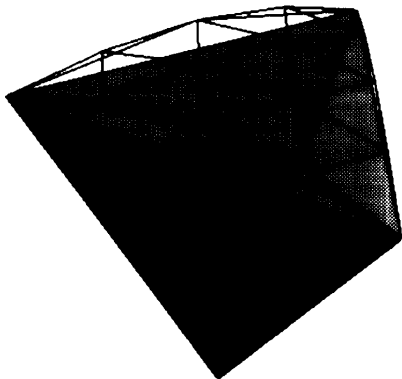


図7 三角形ベジエ曲面の法線ベクトルの存在域
Fig. 7 A normal vector bound of a triangular Bézier surface.

絡する凸多角錐を求めたものである。この図においても、ベジエ法線ベクトル曲面の制御点群によって張られる凸包を細線で示し、凸多角錐を太線と網によって示してある。

6. おわりに

本論文では、ベジエ形式の曲面の法線ベクトルについて考察し、以下の結論を得た。

- 曲面の法線ベクトルの性質、特に曲面間交線との関係について議論し、法線ベクトルの存在域を求めることの重要性を指摘した。
- $n \times m$ 次のテンソル積ベジエ曲面の法線ベクトルが $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積ベジエ曲面として表現できることを示した。また、その制御点の計算式を導き、プログラムによって検証した。
- n 次の三角形ベジエ曲面の法線ベクトルが $(2n-2)$ 次の三角形ベジエ曲面として表現できることを示した。また、その制御点の計算式を導き、プログラムによって検証した。
- ベジエ法線ベクトル曲面の制御点群から、法線ベクトルの存在域を厳しく包絡する凸多角錐を計算する手法を示した。

今後は、このベジエ形式曲面の法線ベクトル表現式および存在域計算法を、曲面間交線算出等の様々な応用に適用したい。

謝辞 本研究の一部は、御器谷科学技術財団研究開発助成ならびに高度自動化技術振興財団研究開発助成によるものである。

参考文献

- 1) Farin, G.E.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Third edition, Academic Press (1993).
- 2) Sederberg, T.W. and Meyers, R.J.: Loop Detection in Surface Patch Intersections, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.5, No.2, pp.161-171 (1988).
- 3) Hohmeyer, M.E.: Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling, PhD Thesis, University of California Berkeley (1992).
- 4) Kriezis, G. and Patrikalakis, N.M.: Rational Polynomial Surface Intersections, *Advances in Design Automation*, ASME, DE-Vol.32, pp.43-53 (1991).
- 5) Hohmeyer, M.E.: A Surface Intersection Algorithm Based on Loop Detection, *Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications* (Rossignac, J. and Turner, J. (eds.)), ACM Press, pp.197-207 (1991).

- 6) Patrikalakis, N.M.: Surface-to-Surface Intersections, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol.13, No.1, pp.89-95 (1993).
- 7) Dokken, T.: Finding Intersections of B-Spline Represented Geometries using Recursive Subdivision Techniques, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.2, No.1-3, pp.189-195 (1985).
- 8) Barnhill, R. and Kersey, S.: A Marching Method for Parametric Surface/Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.7, No.1-4, pp.257-280 (1990).
- 9) Cheng, K.: Using Plane Vector Fields to Obtain all the Intersection Curves of Two General Surfaces, *Theory and Practice of Geometric Modeling* (Strasser, W. and Seidel, H.-P. (eds.)), Springer-Verlag, pp.188-204 (1989).
- 10) Dokken, T., Skytt, V. and Ytrehus, A.-M.: Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, *Recursive Subdivision and It-*

eration in Intersections and Related Problems (Lyche, T. and Schumaker, L.L. (eds.)), Academic Press, pp.207-214 (1989).

(平成7年7月13日受付)

(平成7年12月8日採録)



山口 泰 (正会員)

1961年生。1988年東京大学大学院工学系研究科情報工学専攻博士課程修了。同年東京大学教養学部工学教室助手。1989元年東京電機大学講師。1993年より東京大学教養学部広域システム科学系助教授。形状モデリング、機械系CAD/CAM、コンピュータグラフィクス等の研究に従事。工学博士。精密工学会、ACM、IEEE等の会員。