漸化式を用いるベッセル関数の積分の誤差解析における一般化された超幾何級数の和の定理の応用

吹田篤治 † 吉田年雄 ‡
日本大学理工学部 † 中部大学工学部 ‡

1. はじめに

ベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt, \int_0^x J_\nu(t)/tdt$ の数値計算における誤差解析において誤差の評価式 $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の初項が主要項であることを吉田, 山本 [1),2)] によって、数値実験により検証されている。このことは、一般化された超幾何級数の和の定理を応用すれば理論的にも証明され、かつ２重級数が１重級数に変形され和の定理の応用可能性が増えるのではないかと思い考察した決果、１部分であるが証明と変形ができたので本文で報告する。尚、本文での記号は文献 1),2) と同じとする。

2. $\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子の変形とその初項が主要項であることの証明

本文では、文献 1) の偶数次を扱う。奇数次、文献 2) の場合も全く同様に証明できる。

$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ の分子

$$\approx -\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n}\sum_{l=(m-n)/2}^{m}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \cdot\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu+m+1-i)}{i!(l-i)!(\mu+n+2l-2i+1)\Gamma(\mu+n+m+l-i+1)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{m-n}{2}}\Gamma(\mu+m+1) \cdot\sum_{k=0}^{\frac{m+n}{2}}\frac{(-1)^k}{(\frac{m-n}{2}+k)!(\mu+m+2k+1)} \cdot\frac{1}{\Gamma(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot\sum_{i=0}^{\frac{m-n}{2}+k}\frac{(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-k)_i(-\frac{m-n}{2}-k)_i}{i!(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-k)_i} \cdot\frac{(-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}-k-\frac{\mu}{2})_i}{(-\mu-m)_i} \tag{1}$$

と近似され、２重級数 (1) の後の級数が単項で表されれば (1) は１重級数に変形できかつ $m \gg x$ のとき、項の値が前項に比べて小さいことを示せば初項が主要項であることが証明される。そのためには、次の関係式

$$ {}_3F_2(a,b,c;c+1,d+1;1) = \frac{c}{c-d}{}_2F_1(a,b;d+1;1) - \frac{d}{c-d}{}_3F_2(a,b,c;c+1,d;1) \tag{2}$$

を適用して、${}_3F_2(a,b,c;c+1,d;1)$ の級数だけを考察できれば都合がよい。すなわち k を自然数としたとき、

$$ {}_2F_1(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-k, -\frac{m-n}{2}-k; -\mu-m; 1) = \frac{\Gamma(-\mu-m)\Gamma(2k)}{\Gamma(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+k)\Gamma(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+k)} \tag{3}$$

において、$k \le \frac{m-n}{2}$ のとき、

$$\frac{1}{\Gamma(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+k)} = 0 \tag{4}$$

となり、式 (3) は零となる。そのとき、級数

Application of Summation Theorem for Generalized Series in Error Analysis of Recurrence Technique of Integral of Bessel Functions

† Tokuji Suita † College of Science and Technology, Nihon University
‡ Toshio Yoshida ‡ College of Engineering, Chubu University

$$\sum_{i=0}^{\frac{m-n}{2}+k} \frac{(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-k)_i(-\frac{m-n}{2}-k)_i}{i!(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-k)_i} \cdot \frac{(-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}-k-\frac{\mu}{2})_i}{(-\mu-m)_i} \quad (5)$$

において、$a=-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-k, -l=-\frac{m-n}{2}-k, c=-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-k-\frac{1}{2}, d=-\mu-m-1$ とおいたとき、
和の定理

$$_3F_2(a,-l,c;c+1,a-l;1)=\frac{(c+1-a)_l(1)_l}{(c+1)_l(1-a)_l} \quad (6)$$

が適用できるかどうか調べる。まず

$$_3F_2(a,b,c;c+1,d+1;1) \quad (7)$$

と置き関係式 (2) が適用できるかどうか調べる。
$d=-\mu-m-1 \neq a-l$ となり適用できないが、この手続きを $2k$ 回反復すると和の定理が適用でき、

$$\begin{aligned} &{}_3F_2(a,-l,c;c+1,a-l;1) \\ &= \frac{(c+1-a)_l(1)_l}{(c+1)_l(1-a)_l} \\ &= (-1)^{\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+k}(\frac{m+n}{2}+k)! \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+k+1)}{\Gamma(\mu+m+2k+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、かかる係数は、

$$2^{2k}\frac{(\mu+m+1)(\mu+m+2)\cdots(\mu+m+2k)}{(\mu+m-2k+1)(\mu+m-2k+3)\cdots(\mu+m+2k-1)} \quad (9)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\Psi_{\mu,m,n}(x) \text{ の分子} \\ &\approx -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\frac{m-n}{2}} \frac{1}{(\mu+m-2k+1)(\mu+m-2k+3)} \\ &\quad \frac{1}{\cdots(\mu+m+2k-1)(\mu+m+2k+1)} x^{2k} \end{aligned} \quad (10)$$

と 1 重級数に変形でき、初項が主要項であることを示している。残された問題は、
$k=(m-n)/2+1,(m-n)/2+2,\cdots,(m+n)/2$ のときである。

参考文献

1) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法の誤差解析　情報処理学会論文誌, Vol35,No5,pp917-925(1994)

2) 山本徹志, 吉田年雄： 漸化式を用いる積分 $\int_0^x J_\nu(t)/tdt$ の数値計算法の誤差解析 情報処理学会論文誌, Vol40,No10,pp3653-3660(1999)