

ウェーブレット信号空間における 標本化関数の構成

4V-8

†戸田 忍 本田 郁二 †中西 正和

†慶應義塾大学大学院 理工学研究科 計算機科学専攻

1. はじめに

標本化定理は、アナログ信号の処理が、その標本化によって得られる離散信号の処理によって可能である理論的な根拠を与えるものであり、現在のデジタル信号処理において必要不可欠なものとなっている [1]。

従来の（古典的な）標本化定理では、信号の周波数帯域が制限されている必要があったが、最近ウェーブレット理論において多重解像度解析（MRA）に用いられる、階層構造をもつ関数空間に属する信号に対する標本化定理 [2]、またその拡張 [3] が証明された。これらの定理は非帯域制限信号に対しても成立するものとなっており、新たなウェーブレット解析の手法への発展や、実際の信号処理への応用の可能性が期待される。

本研究では、一つの（信号のモデルとしての）関数の平行移動の線形結合によって定義される信号空間をウェーブレット信号空間と通称し、拡張された標本化定理をもとに、様々なウェーブレット信号空間において数値的に標本化関数を構成し、考察を行う。

2. ウェーブレット信号空間と標本化定理

ある関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ が与えられているとする。また ϕ のトランスレート（平行移動） $\{\phi(t-k); k \in \mathbf{Z}\}$ がある関数空間 V の直交基底であるとする。つまり V は ϕ のトランスレートによって張られており、記号的に

$$V := \overline{\text{Span}}\{\phi(t-k); k \in \mathbf{Z}\} \quad (1)$$

と書く。このとき任意の関数 $f \in V$ は、

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-k)f(t)dt, \quad k \in \mathbf{Z} \quad (2)$$

によって定まる係数列 $\{c_k\} \in l^2$ によって

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(t-k), \quad -\infty < t < \infty \quad (3)$$

と表される。

本研究では、空間 V をウェーブレット信号空間と呼び、便宜上 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ を（広義の）スケーリング関数と呼ぶことにする。

このとき、ある Riesz 基底 $\{S_n; n \in \mathbf{Z}\} \subset V$ が存在して、

$$S_n(t) = S(t-n), \quad -\infty < t < \infty, n \in \mathbf{Z} \quad (4)$$

と書くことができ、任意の $f \in V$ に対し

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)S(t-n), \quad -\infty < t < \infty \quad (5)$$

が成立するとき、ウェーブレット信号空間 V において標本化定理が成立するという。そして $S \in V$ を標本化関数という。

3. 標本化関数の構成理論

ウェーブレット信号空間 V において標本化定理を成立させる標本化関数 S を構成する理論（およびその拡張）の詳細については文献 [2][3] に与えられている。

定理. あるスケーリング関数 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ によって定義されたウェーブレット信号空間 $V := \overline{\text{Span}}\{\phi(t-k); k \in \mathbf{Z}\}$ を考える。このとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\phi(n)| < \infty \quad (6)$$

の下で

$$\phi^*(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n)e^{-2\pi i\lambda n}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (7)$$

を定義すると、 ϕ^* は連続関数となる。この下で標本化定理が成り立つための必要十分条件は

$$\phi^*(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (8)$$

である [3]。

命題。 上記の定理の条件の下で標本化定理が成り立つとき、標本化関数 $S \in V$ は

$$\hat{S}(\lambda) = \frac{\hat{\phi}(\lambda)}{\phi^*(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad (9)$$

により求まる [2][3]。ここで $\hat{\cdot}$ は \cdot の $L^2(\mathbf{R})$ フーリエ変換である。

4. 実験結果と考察

広義のスケーリング関数 ϕ により 2. のウェーブレット信号空間 V を定義し、 V に対する標本化関数 S を (9) 式から求める。そして、 V の任意の信号が標本値と標本化関数によって復元されるかどうかを調べる。本研究では主に次の場合を考える。

1. Haar 関数、Haar ウェーブレット
2. Shannon の標本化関数およびウェーブレット
3. B スプライン
4. Daubechies のスケーリング関数

(1) 1 と 2 は、標本化定理が自明に成立する関数の例である。これらを ϕ とするとき、標本化関数 S は ϕ そのものとなる。

(2) 3 は、スプライン・ウェーブレットの理論で用いられる関数で、一般に、適当な区間 $I \subset \mathbf{R}$ を台にもつ指示関数 χ_I の m 階合成積 χ_I^{m*} として定義される (m 階 B スプラインと呼ぶ)。本研究では $\chi_{[0,1]}^{m*}$ と $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}^{m*}$ について調べる。

$\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}^{m*}$ では全ての整数 m の場合について標本化定理が成立するが、 $\chi_{[0,1]}^{m*}$ の場合は $m \geq 3$ の奇数のとき標本化関数が存在しないことが証明されている [4]。また $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}^{m*}$ について $m = 1, 2, \dots, 10$ の標本化関数の数値例が文献 [5] において与えられている。実験では理論通りの結果を観察できた。

(3) 4 の Daubechies のウェーブレット信号空間では、標本化定理が成立するかどうかは十分解明されていない。実験では $N = 2$ についての標本化関数を確認することができた (図 1)。

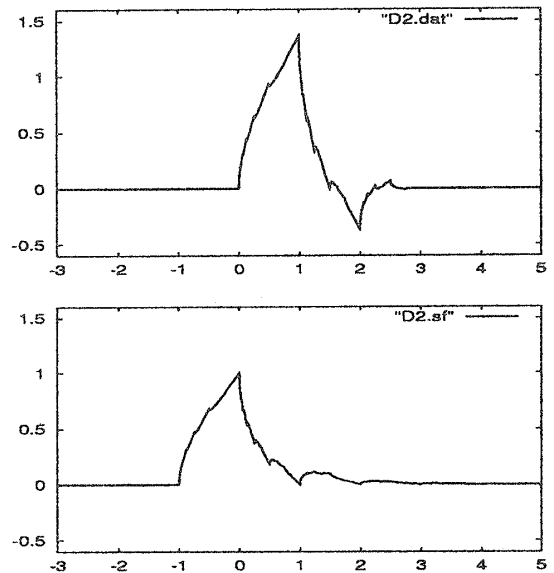


図 1: Daubechies $N = 2$ のスケーリング関数 (上) と標本化関数 (下)

5. おわりに

本研究では、ウェーブレットの理論における基本的なスケーリング関数やウェーブレットを用いて信号空間を定義し標本化関数の数値データを得た。特に B スプラインについては良い結果が得られ、いくつかの Daubechies のスケーリング関数についても標本化定理成立の可能性を見出すことができた。

今後は、他のパラメータの Daubechies など、様々な複雑なウェーブレットの信号空間において標本化関数を構成することや、数値計算の誤差などの検討が課題となる。

参考文献

- [1] 辻井 重男: デジタル信号処理の基礎, 電子情報通信学会, 1995.
- [2] G. G. Walter: A sampling theorem for wavelet subspaces, *IEEE Trans. on Inf.*, vol.38-2 pp.881-884, 1992.
- [3] I. Honda: An abstraction of Shannon's sampling theorem, *IEICE Trans. Fund.*, vol.E81-A no.6 pp.1187-1193, 1998.
- [4] 本田 郁二: 標本化定理の抽象化, 信学技報, vol.IT96-52 pp.31-36, 1997.
- [5] 寅市 和男, 鎌田 賢, 森 亮一: 一般次数のスプライン関数からなる信号空間における標本化基底, 信学論 (A), vol.J71-A no.3 pp.875-881, 1988.