証明の依存性解析による定理証明の冗長探索の削除

2J－1　越村 三幸　長谷川 隆三　(九州大学大学院システム情報科学研究科)

1 はじめに

モデル生成法は，一階述語論理の定理証明法である．モデル生成法の証明は，公理 (正節) から始まり，推論規則 (混合節) を適用して次々と定理 (アトム) を生成していく過程を，目標とする定理 (負節) が得られるまで続ける，ボトムアップ実行に基づいている．しかし純粋なモデル生成法は，証明には無関連な推論を行ったり，証明の分岐後に同じ証明を重複して行ってしまう，という効率上の問題点を原理的に抱えている．

本論文ではこの問題点を解決するために，証明に無関連な推論の除去と補題による重複証明を回避するための機構をモデル生成法に組込む手法を提案する．前者は証明濃縮 (proof condensation)[1]，後者は畳込み (folding-up) 法 [2] という名でタブロ法に基づく証明法の冗長性削除手法として知られる機構である．

これら二つの削除手法を実現するためにモデル生成法に導入する計算機構は,「証明の依存関係の解析」である．解析は，証明が完了した部分 (部分証明) に対して行い，これを基に，証明が未了の部分の枝刈りを行う．

以降の節では，まずモデル生成法について触れた後，本論文で議論する冗長な推論の例を示す．そして，冗長性が依存性解析によりどのように削除されるかを示す．

2 モデル生成法

問題は，含意形式の節 $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ の集合で与えられる．ここで，$A_i(1 \leq i \leq n)$ および $B_j(1 \leq j \leq m)$ は原子論理式 (アトム) である．$\rightarrow$ の左側を前件部，右側を後件部という．$n=0$ のとき，前件部を特に $true$ と書き，正節と呼ぶ．一方，$m=0$ のとき，後件部を特に $false$ と書き，負節と呼ぶ．それ以外の節 $(m \neq 0, n \neq 0)$ は混合節と呼ばれる．また，節が基礎アトムの集合 M に基礎置換 σ のもとで違反 (violated) しているとは，$\forall i(1 \leq i \leq n) A_i\sigma \in M \wedge \forall j(1 \leq j \leq m) B_j\sigma \notin M$ であることをいう．

図 1 にモデル生成法による証明手続きを示す．手続き mg は，真であると考えられる基礎アトムの集合 Mc(モデル候補) と節集合 S を受け取り，S の (部分) 証明木を返す．Mc は空集合 $\emptyset$ に初期設定される．

procedure $mgtp(S) : P$;
　/* 入力 (S)：節集合，出力 (P)：S の証明木 */
　return$(mg(\emptyset, S))$;

procedure $mg(Mc, S) : P$;/*入力 (Mc):モデル候補*/

(1) (モデル棄却) 負節 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow false) \in S$ が，Mc に基礎置換 σ のもとで違反している場合：
　return $(\perp)$

(2) (モデル拡張) 混合節もしくは正節 $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m) \in S$ が，M に基礎置換 σ のもとで違反している場合：全ての $i(1 \leq i \leq m)$ について，$P_i = mg(Mc \cup \{B_i\sigma\}, S)$ とおいて，

return

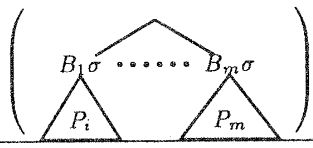


図 1: モデル生成手続き

C1:$true \rightarrow r$.
C2:$r \rightarrow a \vee b$.
C3:$r \rightarrow p \vee c \vee d$.
C4:$r \rightarrow p \vee q$.
C5:$p \rightarrow false$.
C6:$q \rightarrow false$.

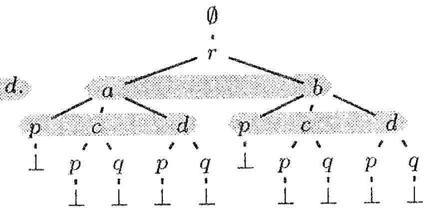


図 2: 証明に無関連なモデル拡張

3 冗長な証明探索の例

証明に無関連なモデル拡張　証明に無関連なモデル拡張の例を図 2 に示す．左側が入力節集合で，右側がその一つの証明木である．$C1$ でモデル拡張を行った時点で，$C2$，$C3$，$C4$ の三つの節が違反節となる．違反節をこの順に用いてモデル拡張をなうと右側のような証明木が選られる．この証明では，$C2$ と $C3$ によるモデル拡張 (図中網掛け部分) は証明に寄与していない．

証明分岐による重複証明　重複証明の例を図 3 に示す．左側が入力節集合で，右側がその証明木である．$C1$ でのモデル拡張により証明が分岐するが，左側と右側の部分証明の網掛け部分は全く同じ証明である．

C1:　$true \rightarrow t \vee p$.
C2:　$p \rightarrow q \vee s$.
C3:　$q \rightarrow r$.
C4:　$s \rightarrow r$.
C5:　$t \rightarrow p$.
C6:　$p \wedge r \rightarrow false$.

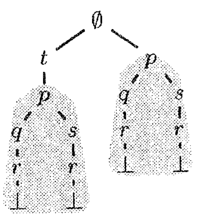


図 3: 証明分岐後の重複証明

Eliminating Redundant Proving by Dependency Analysis,
Miyuki Koshimura and Ryuzo Hasegawa,
Kyushu University,
Kasuga Kouen 6-1, Kasuga, Fukuoka 816-8580, Japan

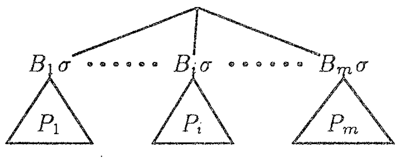
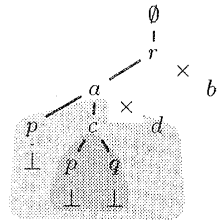
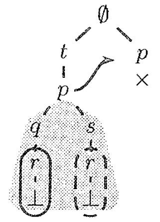


図 4: 部分証明木



部分証明	関連アトム
内側の	r
外側の	r

図 5: 証明に無関連なモデル拡張の削除



証明	関連アトム	単位補題
□	p, q	$\{p\} \vdash_S \neg q$
	p, s	$\{p\} \vdash_S \neg s$
	p	$\emptyset \vdash_S \neg p$

図 6: 補題生成による重複証明の削除

4 依存性解析による冗長性の削除

証明の依存性とは直観的には,「この定理は,この定理とこの定理を用いて証明された」といった定理の因果関係のことである.証明中にこの因果関係を書き留めておけば,証明が終了した後,「実は,この場合分けは証明に不要であった」とか「これだけの条件がそろえば,この定理が成り立つ」といったことを明らかにできる.

以上のことをモデル生成法に適用するために,証明に寄与したアトム (関連アトム) の集合の計算を行う.

定義 1 (関連アトムの集合) 証明木 Ps に対して,関連アトムの集合 $Rel(Ps)$ は,以下のように定義される.

1. $P_S = \frac{|}{\perp}$ であり,$A_1\sigma \wedge \ldots \wedge A_n\sigma \rightarrow false$ でモデル棄却している場合:$Rel(Ps) = \{A_1\sigma, \ldots, A_n\sigma\}$
2. P_S が図 4 で示すような部分証明木であり,$A_1\sigma \wedge \ldots \wedge A_n\sigma \rightarrow B_1\sigma \vee \ldots \vee B_m\sigma$ でモデル拡張している場合:
   (a) $\exists i(1 \leq i \leq m) B_i\sigma \notin Rel(P_i)$ の場合:$Rel(Ps) = Rel(P_i)$
   (b) $\forall i(1 \leq i \leq m) B_i\sigma \in Rel(P_i)$ の場合:$Rel(Ps) = (Rel(P_1) \cup \ldots \cup Rel(P_m)) \setminus \{B_1\sigma, \ldots, B_m\sigma\} \cup \{A_1\sigma, \ldots, A_n\sigma\}$

4.1 証明に関連しないモデル拡張の削除

関連アトムが求まれば,モデル拡張が証明に関連しているかどうかの判定が直ちに行える.

定義 2 (証明に関連したモデル拡張) 違反節 $A_1\sigma \wedge \ldots \wedge A_n\sigma \rightarrow B_1\sigma \vee \ldots \vee B_m\sigma$ によるモデル拡張が証明に関連しているとは,このモデル拡張を根とする図 4 で示す部分証明木において,$\forall i(1 \leq i \leq m) B_i\sigma \in Rel(P_i)$ であることをいう.

証明に関連していないモデル拡張は,削除することができる.図 5 に,図 2 で示した証明から冗長な探索を削除した例を示す.内側の網掛け部分の証明に関連しているアトム集合は $\{r\}$ であり,これに c は含まれていない.これより,$C3$ によるモデル拡張はゴールに関連していないことがわかり,d の下の証明を削除できる.外側の網掛け部分でも同様のことがいえて,b の下の証明を削除できる.

4.2 補題生成による重複証明の除去

いま,ある部分証明 Ps から関連アトムの集合 $Rel(Ps)$ が計算されたものとする.そして別の部分の証明途中で,モデル候補 Mc に対して $Rel(Ps) \subset Mc$ であることが判明すれば,その部分の証明は,それ以上行なう必要はなく,完了してよい.

なぜなら,入力節集合を S とすれば,$S \cup Rel(Ps)$ は,(S の充足可能性に関わらず) 充足不能だからである.このことを $S \cup Rel(Ps) \vdash \perp$ もしくは,$Rel(Ps) \vdash_S \perp$ と表記することにする.補題は,$Rel(Ps)$ から次のようにして作られる.

定義 3 (単位補題) $Rel(Ps) = \{R_1, \ldots, R_n\}$ であるとき,$Rel(Ps) \setminus \{R_i\} \vdash_S \neg R_i (1 \leq i \leq n)$ を $Rel(Ps)$ から得られる単位補題 *(unit lemma)* という.

図 6 に,図 3 で示した重複証明を削除した例を示す.図中の表は各部分証明の関連アトムと抽出される補題を示す.外側の枠で囲んである部分証明 (網掛け部分) からは単位補題 $\emptyset \vdash \neg p$ が抽出される.そして,右側の p にこの補題を適用し p から下の探索を刈り込むことができる.

5 おわりに

証明濃縮と畳込み法をモデル生成法に組込む方法について述べた.今後,これらの枝刈り効果を定量的に評価していく.

参考文献

[1] F. Oppacher and E. Suen, HARP: A Tableau-Based Theorem Prover, *J. of Automated Reasoning*, Vol.4, pp.69–100 (1988)

[2] R. Letz, K. Mayr and C. Goller, Controlled Integration of the Cut Rule into Connection Tableau Calculi, *J. of Automated Reasoning*, Vol.13, pp.297–337 (1994)