二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムの設計と解析

檀浦詠介[†] 櫻井幸一[†]

文献3)において，二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムが提案されている．これは円相場（円/ドル）の変動を，相場が増加している区間と減少している区間に分割し，増加している区間ではドルから円，減少している区間では円からドルという方向に取引きを行う単一方向取引きアルゴリズムを各々の区間ごとに適用し，それを繰り返すという操作により，双方向取引きのアルゴリズムを実現している．さらに，この文献で提案された単一方向アルゴリズムは，各々の区間では最適であることが示されているが，これを繰り返す双方向取引きアルゴリズムはもはや最適でなくなり，二通貨間為替双方向取引きに対する最適なオンラインアルゴリズムはまだ知られていない．我々は相場の変動をいくつかの区間に分割したときに，ある限られた区間が悪い結果となっても全体が良い結果を得られるように，という考えに基づき，双方向取引きへの適用を意識した単一方向為替交換アルゴリズムを設計し，双方向取引きにおいて，この提案アルゴリズムが従来のものよりも優れた効率を示すことを，競合比を計算することで証明するとともに，競合比以外の評価方法を用いて2つのアルゴリズムの比較を行う．

An Improved On-line Algorithm for Money Trading and Its Performance

EISUKE DANNOURA[†] and KOUICHI SAKURAI[†]

On-line algorithms for money-making trading problem are investigated in Ref. 3). Their algorithms divide exchange rate (yen/dollar) run into upward runs and downward runs, then repeat unidirectional algorithms, in which players exchange dollars to yen if the exchange rate running upward, and yen to dollars if the rate running downward. Though the unidirectional algorithm is shown to be optimal, the bidirectional algorithm, which repeats unidirectional algorithms, is no longer optimal. We design the new unidirectional algorithm, in which the player obtains much money in some runs, even though he looses money in a run, and prove that this new bidirectional algorithm achieves better competitive performance than the usual algorithm, and compare these two algorithms by another way.

1. はじめに

今日の情報化社会・金融社会の発展によって，企業・個人を問わず，様々な手段によって資産の投資・運用を行う機会は増大してきている．しかし，資産の投資というものは，将来的な相場の変動に関して確たる情報のない状態で行わなければならないため，何らかのリスクを背負うことになる．このような状況下で，リスクを小さく収益を大きくすることは，すべての投資家に共通した願望である．これを満たすべく多くの研究者が様々な経済問題に対しての議論・研究を重ねてきた[3]．

また今日では，経済問題に対して，未来の相場の変動が分からない状態での決断を行うアルゴリズムの考察が，オンラインアルゴリズムの見地から進められている．オンラインアルゴリズムとは外部から連続した要求を受け取り，各要求に対して瞬時に反応するアルゴリズムである．これに対してオフラインアルゴリズムとは，あらかじめすべての要求を受け取ったうえで，その要求全体に基づいて反応を起こすアルゴリズムである[5]．Coverは株式投資におけるポートフォリオ選択問題を取り扱っており，複数の株式に対してどのように投資を分散させればよいかを示す簡単なオンラインアルゴリズムを示している[1]．またRaghavanは，統計的な敵（価格の変動）に対するオンラインの投資アルゴリズムを解析している[8]．El-Yaniv and Karpは，ローン組替問題に対するオンラインアルゴリズムの設計・評価を行っている[4]．

オンラインアルゴリズムの評価方法のひとつとして

† 九州大学大学院システム情報科学研究科情報工学専攻
Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University

競合比（competitive ratio）と呼ばれるものがある[6]．これは，期間 T において得られた情報だけを使って次の行動を決定していくときに，オフラインアルゴリズムによる最適な行動の結果生じるコストを C_{OPT}，X というオンラインアルゴリズムを用いた結果を C_X とする．このとき $sup_T\{C_X(T)/C_{OPT}(T)\}$ を X の競合比とし，これをどれだけ1に近付けることができるかでそのオンラインアルゴリズムの良さを表すというものである．

El-Yaniv らは，二通貨間為替交換問題において，円相場変動に関する制限を設けることで，利得に関する競合比を有界にするオンラインアルゴリズムを設計している[3]．

二通貨間為替交換問題とは，変動相場制のもとで2つの通貨（ドルと円）の間で交換を繰り返すことにより利益を得ることを目的とする問題である．El-Yaniv らにより提案されているアルゴリズムは，円相場（円/ドル）の値に対し制限を設け，その制限の中で，円相場が上昇している区間と降下している区間に分割し，上昇している区間ではドルから円，降下している区間では円からドルという方向に取引きを行う単一方向取引きアルゴリズムを各々の区間ごとに適用し，それを繰り返すという操作により実現されている．その際，El-Yaniv らは単一方向取引きアルゴリズムを競合比を用いることで最適に設計した．つまり，オフラインによる最適な取引きと実際のオンラインの取引きとの比が一定値（競合比）を超えることがないように設計し，その一定値を最小になるように定めることで最適なオンラインアルゴリズムを構築した．

しかし，ここで提案されているアルゴリズムにはいくつかの問題点が存在する．第一の問題点は以下のようなものである．El-Yaniv らは単一方向取引きアルゴリズムを，各々の区間では最適であるように設計した．しかし，このアルゴリズムを繰り返すことで実現されている双方向取引きアルゴリズムは最適ではなく，二通貨間為替双方向取引きに対する最適なオンラインアルゴリズムの設計は未解決問題である．本研究では，いくつかの区間に分割したときに，ある限られた区間が悪い結果となっても全体が良い結果を得られるように，という考えに基づき，双方向取引きへの適用を意識した単一方向為替交換アルゴリズムを設計し，双方向取引きにおいて，この提案アルゴリズムが従来のものよりも優れた効率を示すことを証明した．

第二の問題点として，アルゴリズムが実際に利益を得ることができるか否かという点がある．Chou らによって，最適なオフラインアルゴリズムで利益をあげることができる入力（相場の変動）ならば必ず利益をもたらすというオンラインアルゴリズムが提案されている[2]．このような，利益を得られるか否かということは，実際に運用する場合に非常に重要な問題である．

El-Yaniv らの双方向アルゴリズムおよび本稿での提案双方向アルゴリズムというのは，最適なオフラインアルゴリズムによって得られる金額を基準とし，これと大きな差が出ることがないように設計されている．このため，最適なオフラインアルゴリズムでも利益があまり得られないような入力（相場の変動）に対しては，不利益を受けることがある．

このような，利益が得られるか否か，つまり，アルゴリズムを適用し始めた時点での所持金額（元金）を基準とした評価方法によって，従来のアルゴリズムと本稿での提案アルゴリズムを比較した場合，どちらの方が優れているのかというのは興味深い問題である．つまり，一方のアルゴリズムにおいて損失を被るような入力（相場の変動）に対しては，もう一方のアルゴリズムも（大小はともかく）損失を被る，あるいは一方が利益を得るならばもう一方も利益を得ることができる，という関係が成立すれば，この評価方法でのこれら2つのアルゴリズムの優劣を決めることが可能である．本稿ではこれに対する解析を行い，これら2つのアルゴリズムには上記のような優劣はつけられないことが分かったのでこれを示す．

以下，2章では El-Yaniv らのアルゴリズムに関して記述する．3章では El-Yaniv らの双方向アルゴリズムよりも小さな競合比を実現する双方向アルゴリズムを構築する．4章では，3章で構築した双方向アルゴリズムと従来のアルゴリズムを，元値を基準とした評価方法によって比較する．

2. El-Yaniv らによる二通貨間為替交換アルゴリズム

2.1 二通貨間為替交換問題のモデル

二通貨間為替交換問題のモデルは大きく以下の2つに分類される．

1. 連続的モデル

   円相場 x が時刻 t ($t \in [0, T]$) の関数で表され，任意の t において取引き可能．ただし，$x(t)$ は連続であるとは限らない．

2. 離散的モデル

   円相場 x が日付 i ($i = 0, 1, \cdots, n$) の関数で表される．1日1回の取引きが可能．

2.2 二通貨間為替交換問題に対するアルゴリズム

El-Yaniv らは円相場変動に対して制限を設けることで，有界な競合比を達成するオンラインアルゴリズムを設計している[3]．これは最適なオフラインアルゴリズムを基準としているため，最適なオフラインでもあまり利益が得られないような相場の変動の際に不利益となる可能性がある．Chou らは，未来の円相場変動に関してある程度の情報が得られれば必ず利益をもたらす，というオンラインアルゴリズムを示している[2]．

2.3 El-Yaniv らの交換アルゴリズム

El-Yaniv らの為替交換アルゴリズムとは，円相場 x（円/ドル）の値が上昇している区間と降下している区間に分割し，上昇している区間ではドルから円，降下している区間では円からドル，という方向に取引きを行う単一方向取引きアルゴリズムを各々の区間ごとに適用し，それを繰り返すという操作により実現されている．

この単一方向取引きアルゴリズムは以下の3つのモデルのもとで実現されている．

1. 相場の上下限が知られている連続的モデル
2. 相場の上下限が知られている離散的モデル
3. 相場の上下限の比だけが知られている離散的モデル

本稿においては，離散的なモデルは連続的なモデルの例外的な入力であるととらえることが可能であることから，連続的なモデルに対する考察を進めていく．

2.4 相場の上下限が知られている連続的モデル

取引きを行う期間 $[0,T]$ において，円相場 x $(m \le x \le M)$ は時刻 t $(t \in [0,T])$ の関数として表され，$[0,T]$ 内の任意の時刻において取引き可能である．ただし，関数 $x(t)$ には不連続点が存在しうるものとする．つまり，不連続点の発生に反応して取引きを行う場合，不連続点の発生した後の相場で取引きは行われる．これは，現実世界においては急激な相場の変動に対して反応するのが間に合わないことが十分ありうるので，それを考えに入れたものである（**図1** 参照）．

El-Yaniv らのアルゴリズムは，アルゴリズムを実行する期間を，相場が増加している区間と降下している区間に分割し，それぞれの区間に対して以下に示す単一方向為替取引きアルゴリズムを適用し，交換を行うというものである．

El-Yaniv らの単一方向為替取引きアルゴリズムとは，円相場関数 x（円/ドル）が上昇している（ドルの価値が上がっている）区間ではドルを円に，降下している（円の価値が上がっている）区間では円をドルに，といういずれか一方向への取引きのみを行うアルゴリズムである．この2つの方向への取引きをそれぞれ交互に繰り返して適用することで，El-Yaniv らの双方向の為替交換アルゴリズムは実現されている．

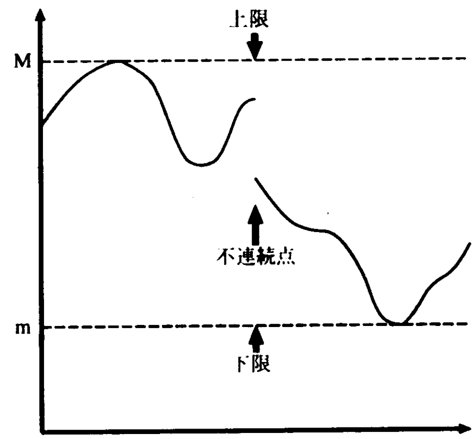

図1 上下限の知られた連続的モデル
Fig. 1 The continuous version, with M and m known.

2.5 El-Yaniv らによる単一方向為替取引きアルゴリズム

ある一定期間 T において，単一方向への取引きを行う（円売ドル買か円買ドル売のいずれかしか行わない）ケースを考える．この際に，ある入力（相場の変動）に対して最適な取引きを行った結果得られる金額を $P_{OPT}(T)$，A というオンラインアルゴリズムを用いた結果得られる金額を $P_A(T)$ とする．このとき，$sup_T\{P_{OPT}(T)/P_A(T)\}$ を A の競合比と定義し，これを最小とするようにこのアルゴリズムは構築されている．

このアルゴリズムは以下に示す規則に従って取引きを行う．以下の記述はドルから円への交換の場合であり，相場が x のときのドルの額を $D(x)$，円の額を $Y(x)$ とし，初期値を $x=a$，$D=1$，$Y=0$ とする．

規則

(1) 終了時には残っているドルをすべて円に交換する．

(2) 規則1. のケース以外では，それまでよりも相場が上昇した場合に取引きを行う．

(3) 規則2. の条件で取引きを行う場合は，相場の変化に応じて以下の金額を所持するように円を買う（$D(x)$ は減少関数であり，$D(M)=0$ であることに注意）．

$a \in [m, rm]$

$$\begin{cases} x \in [a, rm] & D(x) = 1 \\ x \in [rm, M] & D(x) = 1 - \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{x-m}{rm-m} \end{cases}$$

$a \in [rm, M]$

$$\begin{cases} x=a & D(a)=\dfrac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} \\ x\in[a,M] & D(x)=\dfrac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m}-\dfrac{1}{R}\ln\dfrac{x-m}{a-m} \end{cases}$$

ただし，r および R は以下のように定義される．

$$r=\ln\frac{\frac{M}{m}-1}{r-1}$$

$$R=\begin{cases} r & a\in[m,rm] \\ 1+\dfrac{a-m}{a}\ln\dfrac{M-m}{a-m} & a\in[rm,M] \end{cases}$$

定理 2.1 上記のアルゴリズムの競合比は r である．

証明 アルゴリズムに示された $D(x)$ の式から，$a\in[m,rm]$ の場合の $Y(x)$ を求める．$x\in[a,rm]$ では $D(x)=1$ より $Y(x)=0$ である．$x\in[rm,M]$ の場合，

$$D'(x)=-\frac{1}{r(x-m)}$$

が導かれる．$xD'(x)=-Y'(x)$（ドルの増加量と円の減少量の比は円相場の値となる）から，

$$Y'(x)=\frac{x}{r(x-m)}$$

となり，

$$\begin{aligned} Y(x)&=0+\int_{rm}^{x}\frac{t}{r(t-m)}dt \\ &=\frac{x}{r}-m\left(1-\frac{1}{r}\ln\frac{x-m}{rm-m}\right) \end{aligned}$$

である．ここで，$mD(x)+Y(x)\ge x/r$（$x\in[rm,M]$ のとき等号成立）である．ここで $mD(x)+Y(x)$ は，相場の最大値が x であるときに，このアルゴリズムによって得られる円の最小値である．このときのオフラインアルゴリズムで得られる円は x であるので，$a\in[m,rm]$ の場合の競合比は r である．

同様に，$a\in[rm,M]$ では $mD(x)+Y(x)\ge x/R$ が得られ，競合比は R ($\le r$) である．

ゆえに，$a\in[m,M]$ での競合比は r である．

（証明終）

2.6 El-Yaniv らのアルゴリズムの双方向への適用

これまでにも述べたとおり，El-Yaniv らは双方向のアルゴリズムを，単一方向取引きアルゴリズムを区間ごとに繰り返すという操作により実現している．これによって得られる競合比は以下のようになる．

定理 2.2[3] 相場の変動が，アルゴリズム内で仮定された範囲 $[m,M]$ を超えなかった場合，このアルゴリズムは k 区間で r^k という競合比を満たす．

比がちょうど r^k となるような（最悪の）入力は，図 2 のように上限と下限の間を連続的に往復する場合である．

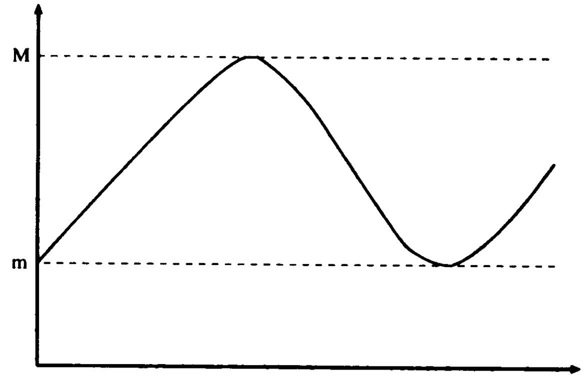

図 2 競合比が最大となる場合
Fig. 2 The case the competitive ratio is greatest by the usual algorithm.

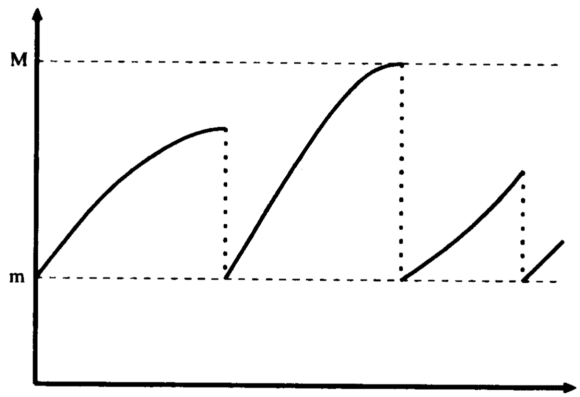

図 3 従来の下限を示す入力
Fig. 3 The input which brings the usual lower bound.

2.7 競合比の限界

El-Yaniv らによって示されている競合比の限界，つまり，これ以上小さな（優れた）競合比を示すアルゴリズムは構築不可能であるという値は，相場の変動に対してさらに制限を加え，その強い制限の下での最適アルゴリズムによって得られる競合比によって示されている．この入力を図 **3** に示す．

このような入力に対する最適アルゴリズムは El-Yaniv らの双方向アルゴリズムである．このときの競合比は $r^{k/2}$ である[3]．

今回，別の制限を設け，それに対する最適アルゴリズムを考えることにより，より大きな競合比が限界として得られたので，これを図 **4** に示す．

上の入力に対する最適アルゴリズムは，El-Yaniv らの単一方向アルゴリズムを，変動範囲を $[m,(mM)^{1/2}]$ および $[(mM)^{1/2},M]$ として交互に適用したものである．最適性の証明は El-Yaniv らの下限の議論と同様にして示すことができる．これによって得られる競合比は $\bar{r}^k$ ($\bar{r}=\ln\frac{(\frac{M}{m})^{1/2}-1}{\bar{r}-1}$) である．ここで，$\bar{r}^2\ge r$

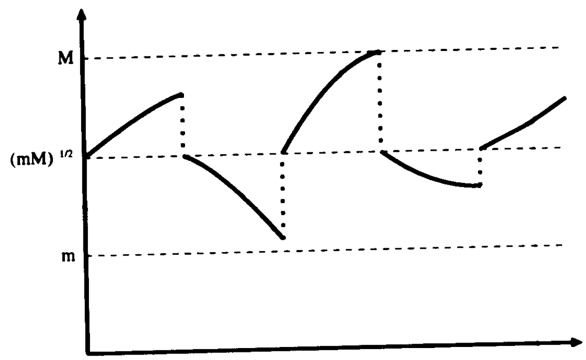

図4 新しい下限を示す入力
Fig. 4 The input which brings the new lower bound.

であることから，競合比の限界として $\tilde{r}^k$ という値が得られる．

3. アルゴリズムの改良

3.1 El-Yaniv らのアルゴリズムの問題点

El-Yaniv らの双方向アルゴリズムは，アルゴリズムを実行する期間を，相場が上昇している区間と降下している区間に分割し，それぞれの区間に対して r という競合比を満たす単一方向取引きアルゴリズムを適用し，交換を行うというものである．この双方向アルゴリズムを適用すると，k 区間に対する競合比は r^k となる．

El-Yaniv らは単一方向アルゴリズムを最適に（r が最小になるように）設計したが，各区間は独立ではない（前の区間の最終値 = 次の区間の初期値という関係がある）ので，部分的に最適なものを繰り返しても全体は最適にはならない．以下に具体例を示す（図5参照）．

円相場 x が rm 以上の値まで上昇した後，不連続点によって m まで降下するという区間について考える．このとき，この区間では最適なオフラインアルゴリズムとの比は r になる．しかし，次の区間ではこれが1になる．つまり，前の区間にとって不利な変動が，次の区間にとっては有利な変動となる．

今回はこの点に注目し，前後の区間との関係を考慮に入れ，ある区間で r よりも悪い結果になっても別の区間で取り戻せばよい，という考えを用いることで，双方向取引きにおいては r^k より小さい競合比を得ることができる単一方向取引きアルゴリズムを構築したので以下に示す．

3.2 改良した単一方向取引きアルゴリズム

今回改良した単一方向取引きアルゴリズム（上昇区間の場合）は k 区間（k は任意の自然数，ただし k 番目の区間の終了時において円相場 $x(t)$ は連続である）

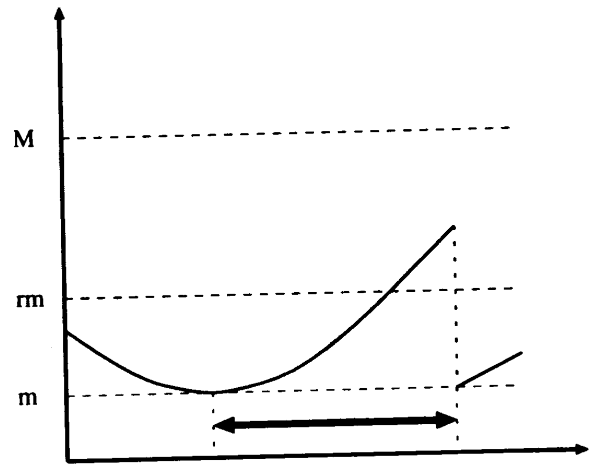

図5 従来のアルゴリズムが最適でない例
Fig. 5 The example for explaining that the usual algorithm isn't optimal.

に適用したときに競合比が $\tilde{r}^k$ になるように設計されている．また，1区間での競合比は $\tilde{r}^2$ である（証明は後述）．

単一方向取引きアルゴリズムを以下に示す．

規則

(1) 終了時には残っているドルをすべて円に交換する．

(2) 規則(1)のケース以外では，それまでよりも相場が上昇した場合に取引きを行う．

(3) 規則(2)の条件で取引きを行う場合は，相場の変化に応じて以下の金額を所持するように円を買う（$D(x)$ は減少関数であり，$D(M)=0$ であることに注意）．

$a \in [m, \tilde{r}^2 m]$

$$\begin{cases} x \in [a, \tilde{r}^2 m] & D(x) = 1 \\ x \in [\tilde{r}^2 m, M] & D(x) = 1 - \dfrac{1}{\tilde{r}} \ln \dfrac{x - \tilde{r}m}{\tilde{r}^2 m - \tilde{r}m} \end{cases}$$

$a \in [\tilde{r}^2 m, M]$

$$\begin{cases} x = a & D(a) = \dfrac{a(1-\frac{1}{\tilde{R}})}{a - \tilde{r}m} \\ x \in [a, M] & D(x) = \dfrac{a(1-\frac{1}{\tilde{R}})}{a - \tilde{r}m} \\ & \qquad -\frac{1}{\tilde{R}} \ln \frac{x - \tilde{r}m}{a - \tilde{r}m} \end{cases}$$

ただし，$\tilde{r}$ および $\tilde{R}$ は以下のように定義される（$D(M)=0$ を満たすように定義している）．

$$\tilde{r} = \ln \frac{\frac{M}{\tilde{r}m} - 1}{\tilde{r} - 1}$$

$$\tilde{R} = \begin{cases} \tilde{r} & a \in [m, \tilde{r}^2 m] \\ 1 + \dfrac{a - \tilde{r}m}{a} \ln \dfrac{M - \tilde{r}m}{a - \tilde{r}m} & a \in [\tilde{r}^2 m, M] \end{cases}$$

定理 3.1 終了時点の相場が $\tilde{r}m$ 以上であれば，上記の単一方向アルゴリズムの競合比は $\tilde{r}$ である．

証明 アルゴリズムに示された $D(x)$ の式から，$a \in [m, \tilde{r}^2 m]$ の場合の $Y(x)$ を求める．$x \in [a, \tilde{r}^2 m]$ では $D(x) = 1$ より $Y(x) = 0$ である．$x \in [\tilde{r}^2 m, M]$ の場合，

$$D'(x) = -\frac{1}{\tilde{r}(x - \tilde{r}m)}$$

が導かれる．$xD'(x) = -Y'(x)$（ドルの増加量と円の減少量の比は円相場の値となる）から，

$$Y'(x) = \frac{x}{\tilde{r}(x - \tilde{r}m)}$$

となり，

$$\begin{aligned} Y(x) &= 0 + \int_{\tilde{r}^2 m}^{x} \frac{t}{\tilde{r}(t - \tilde{r}m)} dt \\ &= \frac{x}{\tilde{r}} - \tilde{r}m \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}} \ln \frac{x - \tilde{r}m}{\tilde{r}^2 m - \tilde{r}m}\right) \end{aligned}$$

である．ここで，$\tilde{r}mD(x) + Y(x) \geq \frac{x}{\tilde{r}}$（$x \in [\tilde{r}^2 m, M]$ のとき等号成立）である．ここで $\tilde{r}mD(x) + Y(x)$ は，相場の最大値が x であり，相場が次の瞬間 $\tilde{r}m$ になり，そのまま終了した場合にこのアルゴリズムによって得られる円の額である．このときのオフラインアルゴリズムで得られる円は x であるので，$a \in [m, \tilde{r}^2 m]$ の場合の競合比は $\tilde{r}$ である．

同様に $a \in [\tilde{r}^2 m, M]$ では $\tilde{r}mD(x) + Y(x) \geq x/\tilde{R}$ が得られ，競合比は $\tilde{R}$ ($\leq \tilde{r}$) である．

ゆえに，$a \in [m, M]$ かつ終了時の相場が $\tilde{r}m$ 以上の場合の競合比は $\tilde{r}$ である．（**証明終**）

El-Yaniv らのアルゴリズムにおいて，

$$r = \ln \frac{\frac{M}{m} - 1}{r - 1}$$

という式が成り立ち，今回のアルゴリズムにおいて

$$\tilde{r} = \ln \frac{\frac{M}{\tilde{r}m} - 1}{\tilde{r} - 1}$$

である．このとき，$r > \tilde{r}$ である．これらが具体的にどのような値となるかを図**6** に示す．ここで，破線は従来の値 (r)，実線は今回の値 ($\tilde{r}$) である．

定理 3.2 この単一方向アルゴリズムの 1 区間での競合比は $\tilde{r}^2$ である．

証明 今回のアルゴリズムは $[\tilde{r}m, M]$ においては El-Yaniv らのアルゴリズムと同じ動作を行い，$\tilde{r}$ という競合比が得られる．しかし実際の変動範囲は $[m, M]$ である．定理 3.1 の証明に示したように，今回のアルゴリズムでは，

$$\tilde{r}mD(x) + Y(x) \geq \frac{x}{\tilde{r}}$$

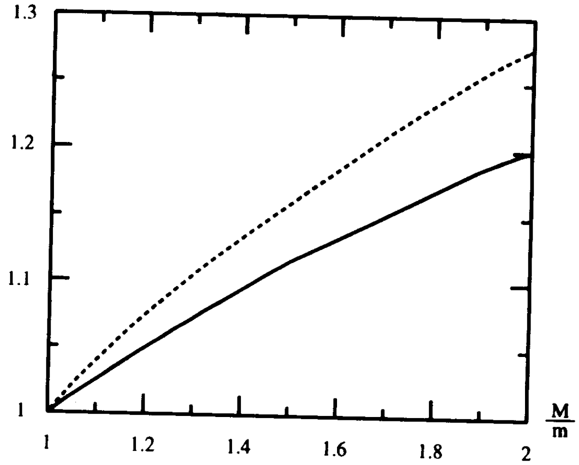

図**6** 競合比の比較

Fig. 6 The graph of competitive ratios of two algorithm.

($x \geq \tilde{r}^2 m$ のときに等号成立）が成り立つが，実際には，残りのドルを $x = m$ で円に換えなければならない可能性がある．ここで，$D(x), Y(x) \geq 0$ より

$$mD(x) + Y(x) \geq \frac{\tilde{r}mD(x) + Y(x)}{\tilde{r}}$$

($Y(x) = 0$，すなわち $x \leq \tilde{r}^2 m$ のときに等号成立）である．ゆえに，

$$mD(x) + Y(x) \geq \frac{x}{\tilde{r}^2}$$

($x = \tilde{r}^2 m$ のときに等号成立）が成り立つ．（**証明終**）

3.3 改良した単一方向取引きアルゴリズムの双方向への適用

上に示した単一方向アルゴリズムを，各区間に対して繰り返し適用するとき，以下の定理が成り立つ．

定理 3.3 連続する k 区間において，この双方向アルゴリズムは以下のような競合比を保証する．

$$\begin{cases} \tilde{r}^k & k \text{ 番目の区間の終了時に } x(t) \text{ が連続} \\ \tilde{r}^{k+1} & k \text{ 番目の区間の終了時に } x(t) \text{ が不連続} \end{cases}$$

証明 アルゴリズムを適用する期間を $[0, T]$，$x(t)$ が極値をとる時刻を t_i ($t_i < t_{i+1}$，$t_0 = 0$，$t_k = T$) とし，以下の証明は，i が偶数のとき $x(t_i)$ が極小になるものとして行う．

$x(t_i)$ が極値であることをアルゴリズムが認識するのにはごくわずかな時間が必要なので，この時間を $t_i + 0$ と表し，$x(t_i + 0) = x_i$ とする．

単一方向アルゴリズムの中で定義されていた $\tilde{R}$ を，区間ごとに定義するために，以下のように x の関数として拡張する．

$$\tilde{R}(x) = \begin{cases} \tilde{r} & x \in [m, \tilde{r}^2 m] \\ 1 + \dfrac{x - \tilde{r}m}{x} \ln \dfrac{M - \tilde{r}m}{x - \tilde{r}m} & x \in [\tilde{r}^2 m, M] \end{cases}$$

$$\tilde{R}_n(x) = \begin{cases} \tilde{R}(x) & n \text{ が偶数のとき} \\ \tilde{R}\left(\dfrac{mM}{x}\right) & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

また，n 番目の区間における最適な取引きと実際の取引きの利得の比を $R_n{}^*$ と定義すると，以下の式が成り立つ．

$R_n{}^* \le \tilde{r}\alpha_n(x_n)\beta_{n-1}(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots, k)$

ただし，$\alpha_n(x)$，$\beta_n(x)$ は以下のように定義される．

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 1 & n = k \text{ かつ，} t = T \text{ で } x(t) \text{ は連続} \\ \tilde{r} & n = k \text{ かつ，} t = T \text{ で } x(t) \text{ は不連続} \\ \max\left[1, \dfrac{\tilde{r}x}{M}\right] & n \ne k \text{ かつ } n \text{ が偶数} \\ \max\left[1, \dfrac{\tilde{r}m}{x}\right] & n \ne k \text{ かつ } n \text{ が奇数} \end{cases}$$

以上の定義より $\alpha_n(x) \ge 1$ である．

$$\beta_n(x) = \frac{R_n(x)}{\tilde{r}} \quad (\le 1)$$

また，$\alpha_n(x)$，$\beta_n(x)$ の間には以下のような関係がある．

$\alpha_n(x)\beta_n(x) \le 1$ $(n = 1, 2, \cdots, k-1)$

上の3つの式より以下の式が導かれる．

$$\prod_{n=1}^{k} R_n{}^* \le \tilde{r}^k \beta_0(x_0)\alpha_k(x_k) \prod_{n=1}^{k-1} \{\alpha_n(x_n)\beta_n(x_n)\} \le \tilde{r}^k$$

ゆえに k 区間での競合比は

$$sup \prod_{n=1}^{k} R_n{}^* = \begin{cases} \tilde{r}^k & t = T \text{ で } x(t) \text{ が連続} \\ \tilde{r}^{k+1} & t = T \text{ で } x(t) \text{ が不連続} \end{cases}$$

となる． **（証明終）**

ただし，このアルゴリズムも最適ではない．これは

$R_n{}^* \le \tilde{r}\alpha_n(x_n)\beta_{n-1}(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \cdots, k)$

において等号が成立する条件がごく限られているので，等号が成立しない（良い結果が得られる）条件下でのリスクをより高めることで，$\tilde{r}$ の値をさらに小さくすることが可能だからである．このことを以下に示す．

今回のアルゴリズムは以下のような相場の変動のときに最悪の結果（1区間あたりの競合比が $\tilde{r}$）を示すように設計されている（図7参照）．

(1) 区間1，2のように相場が $\tilde{r}^2 m(\frac{M}{\tilde{r}^2})$ まで上昇（降下）した後不連続点によって $m(M)$ まで降下（上昇）した場合（区間1は $\tilde{r}^2$，区間2は1）

(2) 区間3，4のように m から M（M から m）まで単調に上昇（降下）した場合（区間3，4ともに $\tilde{r}$）

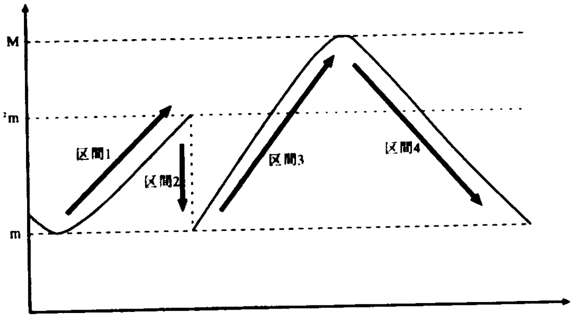

図7 競合比が最大となる場合

Fig. 7 The case the competitive ratio is greatest by this algorithm.

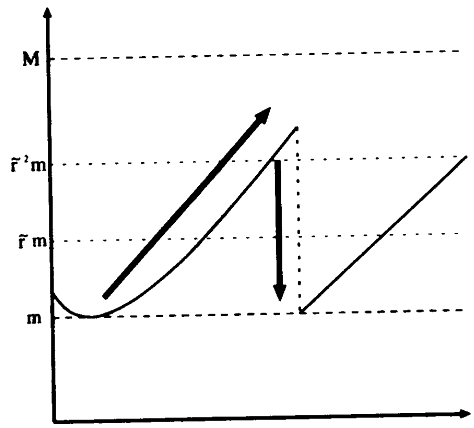

図8 今回のアルゴリズムが最適でない例

Fig. 8 The example that the this algorithm isn't optimal.

しかし，図8のように $\tilde{r}^2 m$ より大きな値から m まで不連続に変化した場合には，すでに一部のドルを円に換えているので，最適な取引きとの比率は $\tilde{r}^2$ よりも小さくなる．これを可能な限り $\tilde{r}^2$ またはそれにに近い値になるように設計することで $\tilde{r}$ の大きさを小さくすることができる．

4. 元金を基準とした評価方法による解析

Chou らによって，二通貨間為替交換問題に対するアルゴリズムが提案されている[2)]．ここでは，El-Yaniv らの双方向アルゴリズムの問題点が指摘されている．つまり，オフラインでの最適な取引きを基準として設計されているため，最適な取引きでもあまり利益が得られないような相場の変動の際には不利益を受けてし

表1　従来のアルゴリズムの方が優れた例
Table 1　The example of making money by the usual algorithm.

		従来のアルゴリズム		今回のアルゴリズム	
日付	x	$D(x)$	$Y(x)$	$D(x)$	$Y(x)$
5/23	106.75	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
5/24	106.94	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
5/27	107.70	0.844107	16.789724	1.000000	0.000000
5/28	108.60	0.424414	62.368351	0.640263	39.067439
5/29	108.63	0.413045	63.603302	0.621097	41.149400
5/30	107.71	0.435546	61.179733	0.107799	96.436801
得られたドル		1.003551		1.003136	

表2　今回のアルゴリズムの方が優れた例
Table 2　The example of making money by our algorithm.

		従来のアルゴリズム		今回のアルゴリズム	
日付	x	$D(x)$	$Y(x)$	$D(x)$	$Y(x)$
4/30	104.27	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
5/1	105.36	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
5/2	105.25	0.618681	40.133833	0.432631	59.715635
5/7	105.15	0.655082	36.306212	0.491726	53.501729
5/8	105.26	1.000002	0.000000	1.000008	0.000000
5/9	104.80	0.772372	23.855556	0.674265	34.137806
得られたドル		1.000002		1.000008	

まうことがある，というものである．そこでChouらは，元の金額を基準にした評価に基づいた設計を行い，設定された仮定が破られない限りは必ず利益を得ることができるというオンラインアルゴリズムが設計されている．

このような不利益は，我々が今回提案した双方向アルゴリズムにも発生しうる．そこで，Chouらの評価方法に基づけば，El-Yanivらの双方向アルゴリズムと我々の双方向アルゴリズムはどちらの方が優れているのか，という議論が考えられる．

このような方針に従って解析を行った結果，これら2つの双方向アルゴリズムには上記のような評価方法では優劣をつけられないことが分かった．このことを，実際の相場変動のデータ[7]に対して各々のアルゴリズムを適用することで示す．**表1**，**表2**に，従来のアルゴリズムでは利益，今回のアルゴリズムでは不利益となる例，およびその逆の例を示す．

いずれの例も，開始時と終了時の相場に大きな差が存在する．これは，アルゴリズムの適用期間において相場が降下すればするほど，オフラインアルゴリズムによって得られる利益の大きさが大きくなるからである．逆にいえば，上昇する区間は長いが降下する区間の長さは短いという入力が，オンラインアルゴリズムにとって利益を得るのが難しい．

5. おわりに

本稿において論じられたアルゴリズムはいずれも「競合比」という評価方法に基づいて設計されたアルゴリズムである．つまり，オフラインアルゴリズムにどれだけ近付けることができるかを議論しており，現実の事象に即した改良ではない．しかしながら，「競合比」はmin-maxを評価する評価方法であることから，大きな損害を被らないような改良であることはいえる．現実の為替交換は必ずしも利益をあげることを目的としてはいないことから，このような「損害を小さくする」アルゴリズムも十分考察の価値はあると思う．しかしながら，本稿のアルゴリズムは取引きのコストを考察しておらず，実際に運用するにはそのことも考慮してアルゴリズムの設計を行う必要がある．

また，本稿において競合比の上下限をそれぞれ改良したが，いまだ上下限は一致しておらず，最適なオンラインアルゴリズムは未解決である．今後は，最適アルゴリズムの構築のために，上下限の両面から考察を進めていきたい．

参考文献

1) Cover, T.M.: Universal Portforios, *Journal of Mathematical Finance*, Vol.1, No.1, pp.1–29 (1991).
2) Chou, A., Cooperstock, J., El Yaniv, R.,

Klugerman, M. and Leighton, T.: The Statistical Adversary Allows Optimal Money-making Trading Strategies, *Proc. SODA '95*, (1995).
3) El Yaniv, R., Fiat, A., Karp, R. and Turpin, G.: Competitive Analysis of Financial Games, *Proc. 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp.327–333 (1992).
4) El Yaniv, R. and Karp, R.M.: The Mortgage Problem, *Proc. 2nd Israel Symposium on Theory and Computing Systems*, (1993).
5) Karp, R.M.: On-line Algorithms Versus Off-line Algorithms: How Much Is it Worth to Know the Future?, *Proc. IFIP*, (1992).
6) Karlin, A.R., Manasse, M.S., Rudolph, L. and Sleator, D.D.: Competitive Snoopy Caching, *Algorithmica*, Vol.3, No.1, pp.70–119 (1988).
7) 日本経済新聞，1996 年 4 月 30 日～5 月 30 日発行.
8) Raghavan, P.: A Statistical Adversary for On-Line Algorithms, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Vol.7, pp.79–83 (1991).

(平成 8 年 3 月 12 日受付)
(平成 8 年 9 月 12 日採録)

檀浦 詠介（学生会員）
平成 8 年，九州大学工学部情報工学科卒．現在，同大大学院システム情報科学研究科情報工学専攻修士 1 年．経済ゲーム，オンラインアルゴリズムに関する研究に従事．情報処理学会会員

櫻井 幸一（正会員）
昭和 61 年九州大学理学部数学科卒業．昭和 63 年同大大学院修士課程修了．同年三菱電機（株）入社．現在，九州大学大学院システム情報科学研究科情報工学専攻助教授．計算複雑性理論，暗号理論，情報セキュリティの研究に従事．工学博士．情報処理学会，日本数学会各会員．