3D－3

陽的6段5次ルンゲークッタ法における縮退解系を最適化したものの比較

大野博、堀田伸二
茨城大学工学部

1　はじめに

陽的ルンゲークッタ法は常微分方程式の初期値問題の数値解法の一つである。高次陽的ルンゲークッタ法については、田中正次らが精力的に研究してしまた。11次陽的ルンゲークッタ公式を作るのに必要な情報をえるためにこの研究を行った。(もっとも、田中正次らが公開していなかっただけかもしれないが。)A.R.Curtis [2] やE.Hairer [3] が8次公式や10次公式を作る上で、次数条件式を簡単化する仮定を多く使っている。こうやって作られた公式を最適化するのであるが、最適化されたものは全体のうちどのへんに位置するのか推測してみたくなった。ここでは、この簡単化のための仮定の組み合わせをいろいろ変えて6段5次陽的ルンゲークッタ公式を作り、それぞれ最適化して比較することにする。その結果を講演のときに報告する。

2　陽的ルンゲークッタ法

常微分方程式の初期値問題

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{2.1}$$

の数値解法の一つとしてs段陽的ルンゲークッタ法

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}_{n+1} &=& \boldsymbol{y}_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i \boldsymbol{k}_i \\ \boldsymbol{k}_1 &=& \boldsymbol{f}(x_n,\boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{k}_2 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_2 h, \boldsymbol{y}_n + h a_{21}\boldsymbol{k}_1) \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{k}_s &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_s h, \boldsymbol{y}_n h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\boldsymbol{k}_j) \end{array}\right. \tag{2.2}$$

が提案されている。この方法は積分すべき区間を m 個に分割し、各分割した点 $x_i(i=1,\cdots,m)$ の近似値 $\boldsymbol{y}_i(i=1,\cdots,m)$ を1つずつ求めるものである。hはそれぞれの分割の幅を表す。パラメータ a_{ij}、b_i、c_iを(2.1)式と(2.2)式をそれぞれテーラー展開したものをできるだけ h の高次の次数まで合うように選ぶ。これをルンゲークッタ公式の次数をいう。一般的に次数の大きい公式ほど精度がよいものになる。6段陽的ルンゲークッタ法はつぎのようになる。

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}_{n+1} &=& \boldsymbol{y}_n + h(b_1\boldsymbol{k}_1 + b_2\boldsymbol{k}_2 + b_3\boldsymbol{k}_3 + b_4\boldsymbol{k}_4 + b_5\boldsymbol{k}_5 + b_6\boldsymbol{k}_6) \\ \boldsymbol{k}_1 &=& \boldsymbol{f}(x_n,\boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{k}_2 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_2 h, \boldsymbol{y}_n + h a_{21}\boldsymbol{k}_1) \\ \boldsymbol{k}_3 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_3 h, \boldsymbol{y}_n + h(a_{31}\boldsymbol{k}_1 + a_{32}\boldsymbol{k}_2)) \\ \boldsymbol{k}_4 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_4 h, \boldsymbol{y}_n + h(a_{41}\boldsymbol{k}_1 + a_{42}\boldsymbol{k}_2 + a_{43}\boldsymbol{k}_3)) \\ \boldsymbol{k}_5 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_5 h, \boldsymbol{y}_n + h(a_{51}\boldsymbol{k}_1 + a_{52}\boldsymbol{k}_2 + a_{53}\boldsymbol{k}_3 + a_{54}\boldsymbol{k}_4)) \\ \boldsymbol{k}_6 &=& \boldsymbol{f}(x_n + c_6 h, \boldsymbol{y}_n + h(a_{61}\boldsymbol{k}_1 + a_{62}\boldsymbol{k}_2 + a_{63}\boldsymbol{k}_3 + a_{64}\boldsymbol{k}_4 + a_{65}\boldsymbol{k}_5)) \end{array}\right. \tag{2.3}$$

6段陽的ルンゲークッタ法については、5次公式は作ることが可能であるが、6次公式は作ることができないということが知られている。ここでは5次公式について考えることにする。[1]

丸め誤差については、次の数量 R で評価する。

$$R = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{6}|b_i| \tag{2.4}$$

一般に R の値が小さいほど、丸め誤差の影響は小さくなる。[5]

また、5 次の (2.3) 式にテスト方程式

$$y' = \lambda y, \quad \Re(\lambda) < 0 \tag{2.5}$$

に適用すると、安定性多項式 [5]

$$P(z,\gamma) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \gamma\frac{z^6}{6!}, \quad z = h\lambda \tag{2.6}$$

をえる。ガウス平面上で、$|P(z,\gamma)| < 1$ となる領域を考え、この領域に含まれる実軸の長さが長いほど安定性がよいとされている。

3　数値実験の方法

(2.3) 式を 5 次公式となるように 3 種類の簡単化の仮定 [4] を使ってそれぞれ次数条件式を解く。それぞれについて、(2.6) 式のγの値ごとにそれぞれ最適化する。丸め誤差を評価する数量 R とともに比較する。

参考文献

[1] J.C.Butcher. *The numerical analysis of ordinary differential equations.* John Wiely & Sons, 1987.

[2] A.R.Curtis. *An Eight Runge-Kutta Process with Eleven Function Evaluations per Step.* Numer.Math. 16,268-277,1970.

[3] E.Hairer. *A Runge-Kutta Method of Order 10.* J.Inst.Maths. Applics.,21,47-59,1978.

[4] E.Hairer,S.P.Norsett,G.Wanner *Solving Ordinary Differential Equations I* Springer-Verlag,1987.

[5] 田中正次、高山尚文、山下茂 *7* 段数 *6* 次陽的 *Runge-Kutta* 法の最適化について 情報処理学会論文誌、33,8,993-1005,1992