一次分数変換を利用した近接根の分離方法とその誤差について

鈴木 秀男[†] 小林 英恒[††]

連立代数方程式のすべての根を数値的に求める場合，それらが非常に近接している場合がある．そして，近接の度合いが強くなればなるほど，近接根の近似解は数値的な正確さが失われる．そこで筆者らはこのような近接根を分離するために一次分数変換をすでに発表した．一次分数変換を適当に選ぶと，近接根付近を大きく拡大し，しかも近接根から離れている根は，ある一定の値へ近づけることができる．そして，この性質を利用し，近接根を含む新たな，しかも低次の方程式を数値的に導くこともできる．このような操作を数値的な擬局所化と呼ぶ．筆者らはすでに近接根の分離における誤差と，一度減次をした場合の誤差について報告している．本論文では，すでに筆者らが提案している一次分数変換の具体的な型を利用し，近接根の分離における誤差を述べた後，数値的な擬局所化を繰り返し適用した場合における誤差も報告する．

Separation of Close Roots by Linear Fractional Transformations and Error

HIDEO SUZUKI[†] and HIDETSUNE KOBAYASHI[††]

Some systems of algebraic equations have solutions which are very close to each other. And, by a numerical calculation, the closer the less accurate approximations we obtain. To avoid this inaccuracy, we employ linear fractional transformations and separated close roots. A linear fractional transformation, if chosen properly, separates close roots to a large extent and accumulates the other roots around a constant number. Using this property, by eliminating a root remote from the close roots we can obtain an algebraic equation having the close roots as its approximate roots. We call this procedure to make a new algebraic equation of less degree as "pseudo-localization". We have already reported separation of close roots and error caused by it, and error arising from one pseudo-localization procedure. In this paper, we discuss separation of close roots by using some types of linear fractional transformations and we analyze error in detail. Moreover, we discuss the error after some repeated pseudo-localization.

1. はじめに

筆者らは，これまで連立代数方程式の交点での重複度を数値計算によって求めることを研究してきた[1)~3),5),6)]．その方法はZeuthenの定理[10)]より導かれ，簡単にいうと，問題の根の十分近くを適当な超平面で切断して新たな連立代数方程式を作り，この新たな方程式の根を数値計算により求めることによって，元の根の重複度を計算するものである．このとき，新たに得られる連立代数方程式は，元の根の近くで近接根を持つことになる．

この方法の特徴としては，

- すべての根をあらかじめ求める必要はない
- 与えられた点の近傍のみ考えればよい
- 簡単な比の計算で重複度が求まる

があげられる．さらに，筆者らはこれらの方法にいくつかの改良を加えた．特に，数値計算により真の重複度を挟む方法を考案し成功している[3),6)]．また数値計算を行ううえで現れる未知定数の影響を除去するための方法も考案した．これらの改良により，ある程度分離性を保ちつつ重複度を計算することができる．

一般に，アルゴリズムの性質上，重複度が大きくなるほど近接根の数も多くなる．とくに，重複度が極端に大きくなるような連立代数方程式の場合には，数多くの近接根が現れる．そして，このような場合に，重複度の精度をあげようとすれば，さらに超平面を根に近づける必要がある．その結果，重複はしていないが非常に近接した根が現れる可能性があり，その根を分離できなければ元の根の重複度が求まらないことになる．

† 東京職業能力開発短期大学情報処理科
Tokyo Polytechnic College
†† 日本大学理工学部
Faculty of Science and Engineering, Nihon University

そこで，筆者らは，このような非常に近接した根を分離するために一次分数変換を利用し，一変数および二変数の代数方程式について実際的な近接根の分離の方法と計算の例をすでに報告している[4),7)〜9)]．さらに，一般の多変数連立代数方程式の近接根もこれらの方法の拡張として分離が可能であることを注意しておく．なお，近接根の分離については，筆者らの方法と異なる方法が文献 11) に報告されている．

一次分数変換により，近接根は適当に拡大され，通常の単根のように計算され，近接根から離れている根はある一定の値へ近づくという性質がある．この性質を利用することにより，数値計算によって近接根の近似解を根とする，新たな，しかも低次の方程式を導くこともできる．このような操作を数値的な擬局所化と呼ぶ．

この報告は，文献 7) で取りあげた 4 つの一次分数変換を用い，文献 7) では紙面の都合上説明できなかった細かい部分を補い，擬局所化については繰り返しにともなう誤差についての部分を追加したものである．

2. 一次分数変換

議論を簡単にするためにここでは，一変数代数方程式 $f(x)=0$ の根について考えることにする．まず，この方程式を一次分数変換によって変換する．そのために，斉次座標 (X,Y) を導入し多項式 $f(x)$ の斉次化

$$F(X,Y)=Y^{\deg f}f(X/Y)$$

を作る．次に，正則な射影変換

$$\begin{cases} U=aX-bY \\ V=cX-dY \end{cases} \tag{1}$$

によって得られる新しい式を $H(U,V)$ とする．つまり，

$$\begin{cases} X=a'U-b'V \\ Y=c'U-d'V \end{cases}$$

を式 (1) で与えられる射影変換の逆変換とすると

$$H(U,V)=F(a'U-b'V,\ c'U-d'V)$$

である．射影変換をうまく選んで点 $V=0$ は元の方程式 $f(x)=0$ の根でないようにとって，この点 $V=0$ を新たな無限遠点とするとき有限部分での方程式は

$H(u,1)=0$ ただし $u=U/V$

で与えられる．射影変換は 1 対 1 写像であるからこの方程式の根が元の方程式 $f(x)=0$ の根と重複度も含めて一対一に対応する．

3. 近接根の分離

簡単のために $f(x)$ の根はすべて実数とし，それらを $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ $(r+s=n)$ とする．

$$f(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{s}(x-\beta_j)\quad r+s=n \tag{2}$$

において $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ を近接根とし，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ をそれら近接根から十分離れている根とする．すなわち近接根は，ある α を適当に与えたときすべて区間

$(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$

に属するとする．ここで $\epsilon>0$ は十分小さな数とする．なお，複素根の場合には，ある根を中心とする近傍を考えればよい．

さて，分数変換 $u=\varphi(x)=(ax-b)/(cx-d)$ は x について解くことができる．すなわち，

$$x=\frac{du-b}{cu-a}$$

これを式 (2) の $f(x)$ に代入し，整理すると次のようになる．

$$\left(\frac{1}{uc-a}\right)^n\prod_{i=1}^{r}(d-\alpha_i c)\prod_{i=1}^{r}\left(u-\frac{b-\alpha_i a}{d-\alpha_i c}\right) \times\prod_{j=1}^{s}(d-\beta_j c)\prod_{j=1}^{s}\left(u-\frac{b-\beta_j a}{d-\beta_j c}\right)$$

ここで，得られた式の分子に最高次の係数の逆数を掛けた式を $h(u)$ と置く．つまり

$$h(u)=\prod_{i=1}^{r}\left(u-\frac{b-\alpha_i a}{d-\alpha_i c}\right)\times\prod_{j=1}^{s}\left(u-\frac{b-\beta_j a}{d-\beta_j c}\right)$$

この新しい式の係数は数式処理言語を用いれば必要な精度まで簡単に求められること，この式の係数は適当に分数変換を選べば，ほぼ整数程度の大きさにできることを注意しておく．

するとその近接根に対応する根は $i=1,\cdots,r$ に対して $(b-\alpha_i a)/(d-\alpha_i c)$ となり，近接根と関係ない方の根は $j=1,\cdots,s$ に対して $(b-\beta_j a)/(d-\beta_j c)$ となる．

また分数変換による誤差については，$h(u)=0$ の近似解を u_i，それに対する厳密解を $\tilde{u}_i$ と置き，$\tilde{u}_i$ に対応する $f(x)=0$ の厳密解を $\tilde{x}_i$ とする．このとき

$$\Delta u_i=u_i-\tilde{u}_i,\quad \Delta x_i=x_i-\tilde{x}_i$$

と置くと，次の関係が成り立つ．

$$\Delta x_i=x_i-\tilde{x}_i=\frac{bc-ad}{(\tilde{u}_i c-a)(u_i c-a)}\Delta u_i \tag{3}$$

ここで筆者らは，a，b，c，d の具体的な値として

次の4種類の分数変換 φ を提案する．

3.1 元の方程式の近似解を必要としない場合

元の方程式の近似解が得られていなくとも，近接根の範囲が分かれば，次のようにしてこの範囲内にある近接根を分離できる．

(1) $a=1, b=\alpha, c=1, d=\alpha-\gamma\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1)$
このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる．

$$\varphi(\infty)=1,\ \varphi(\alpha)=0,\ \left|\lim_{x\to\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|=\infty$$
$$u=\varphi(x)=\frac{x-\alpha}{x-\alpha+\gamma}$$
$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\alpha-\gamma)u-\alpha}{u-1}$$

また近接根に対応する根と，近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{c_i}{c_i+k}\quad (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, |c_i|<1)$$
$$i=1,\cdots,r$$
$$\frac{\beta_j-\alpha}{\beta_j-\alpha+\gamma}\qquad j=1,\cdots,s$$

となる．さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は，$(-1/(k-1),1/(k+1))$ へと拡大される．

(2) $a=0, b=\gamma, c=1, d=\alpha-\gamma\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1)$
このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる．

$$\varphi(\infty)=0,\ \varphi(\alpha)=-1,\ \left|\lim_{x\to\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|=\infty$$
$$u=\varphi(x)=\frac{-\gamma}{x-\alpha+\gamma}$$
$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\alpha-\gamma)u-\gamma}{u}$$

また近接根に対応する根と，近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{-k}{k+c_i}\quad (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, |c_i|<1)$$
$$i=1,\cdots,r$$
$$\frac{-\gamma}{\beta_j-\alpha+\gamma}\qquad j=1,\cdots,s$$

となる．さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は，$(-1-1/(k-1),-1+1/(k+1))$ へと拡大される．

3.2 元の方程式の近似解を必要とする場合

もし，元の方程式の近接根以外の根の近似解が得られているならば，その近似解を利用し近接根を分離することができる．後で示すことであるが，実は，数値的な擬局所化を行う場合に，近接根以外の根の近似解が得られている方が有利である．また，分数変換に利用する近接根以外の根は任意にとれるが，ここでは絶対値最大の根を採用する．

(3) $a=\beta_l-\alpha+\gamma, b=(\beta_l-\alpha+\gamma)\alpha, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$
このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる．

$$\varphi(\beta_l)=1,\ \varphi(\alpha)=0,\ \left|\lim_{x\to\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|=\infty$$
$$u=\varphi(x)=\frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)(x-\alpha)}{(\beta_l-\alpha)(x-\alpha+\gamma)}$$
$$x=\varphi^{-1}(u)$$
$$=\frac{(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)u-\alpha(\beta_l-\alpha+\gamma)}{(\beta_l-\alpha)(u-1)-\gamma}$$

また近接根に対応する根と，近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)c_i}{(\beta_l-\alpha)(c_i+k)},\ (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, |c_i|<1)$$
$$i=1,\cdots,r$$
$$1\ (j=l),\ \frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)(\beta_j-\alpha)}{(\beta_l-\alpha)(\beta_j-\alpha+\gamma)}\ (j\neq l)$$
$$j=1,\cdots,s$$

となる．さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は，$(-(\beta_l-\alpha+\gamma)/\{(\beta_l-\alpha)(k-1)\},(\beta_l-\alpha+\gamma)/\{(\beta_l-\alpha)(k+1)\})$ へと拡大される．

(4) $a=\gamma, b=\beta_l\gamma, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$
このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる．

$$\varphi(\beta_l)=0,\ \varphi(\alpha)=-1,\ \left|\lim_{x\to\alpha-\gamma}\varphi(x)\right|=\infty$$
$$u=\varphi(x)=\frac{(x-\beta_l)\gamma}{(\beta_l-\alpha)(x-\alpha+\gamma)}$$
$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)u-\beta_l\gamma}{(\beta_l-\alpha)u-\gamma}$$

また近接根に対応する根と，近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{-(\beta_l-\alpha-c_i\epsilon)k}{(\beta_l-\alpha)(k+c_i)},\ (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, |c_i|<1)$$
$$i=1,\cdots,r$$
$$0\ (j=l),\ \frac{(\beta_j-\beta_l)\gamma}{(\beta_l-\alpha)(\beta_j-\alpha+\gamma)}\ (j\neq l)$$
$$j=1,\cdots,s$$

となる．また近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は，$(-1-(\beta_l-\alpha+\gamma)/\{(\beta_l-\alpha)(k-1)\},-1+(\beta_l-\alpha+\gamma)/\{(\beta_l-\alpha)(k+1)\})$ へと拡大される．

表1 分数変換による拡大の様子 ($\alpha = 0$, $\epsilon = 1/10000$, $k = 10$)
Table 1 Extend by linear fractional transformations ($\alpha = 0, \epsilon = 1/10000, k = 10$).

分数変換の型	拡大された区間
変換(1)	(−1/9, 1/11)
変換(2)	(−10/9, −10/11)
変換(3)	(−111/1000, 999/11000)
変換(4)	(−1111/1000, −10001/11000)

以上4つの型で表される分数変換において，近接根の区間が拡大される様子を，$\alpha = 0$, $\epsilon = 1/10000$, $k = 10$ として見てみると**表1**のようになり，元の区間に比べていずれの変換においても拡大されていることが分かる．

3.3 分数変換における誤差

このとき元の方程式の近接根に対応する根は，変換(1)，(3)においては0を中心に拡大され，変換(2)，(4)においては -1 を中心に拡大されることが分かる．したがって，k の値を（1から1000程度の）適当に大きすぎない値にとっておけば変換後の方程式では根と根の間隔が元の間隔と比較して大幅に拡大される．

次にこれら4つの分数変換における誤差について述べる．近似解の有無に関係なく以下の命題が成り立つ．

命題 3.1 $h(u) = 0$ の近似解を u_i，それに対する厳密解を $\tilde{u}_i$ と置き，$\tilde{u}_i$ に対応する $f(x) = 0$ の厳密解を $\tilde{x}_i$ とする．このとき

$$\Delta u_i = u_i - \tilde{u}_i, \quad \Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i$$

と置くと，次の関係が成り立つ．

$$|\Delta x_i| \fallingdotseq \gamma |\Delta u_i| \qquad (4)$$

［証明］

式(3)において，それぞれの変換に対応する a，b，c，d を代入すれば

変換(1)：$\Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = 1/\{(\tilde{u}_i - 1)(u_i - 1)\}\gamma\Delta u_i$

変換(2)：$\Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = 1/(u_i\tilde{u}_i)\gamma\Delta u_i$

変換(3)：$\Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = (\beta_l - \alpha + \gamma)(\beta_l - \alpha)\gamma/[\{(\beta_l - \alpha)(\tilde{u}_i - 1) - \gamma\}\{(\beta_l - \alpha)(u_i - 1) - \gamma\}]\Delta u_i$

変換(4)：$\Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = (\beta_l - \alpha)(\beta_l - \alpha + \gamma)/[\{(\beta_l - \alpha)u_i - \gamma\}\{(\beta_l - \alpha)\tilde{u}_i - \gamma\}]\gamma\Delta u_i$

を得る．ここで $\gamma = k\epsilon \ll 1$ であり，$|u_i|, |\tilde{u}_i| \ll 1$（変換(1)，(3)），$u_i, \tilde{u}_i \fallingdotseq -1$（変換(2)，(4)）であるから上式はそれぞれ

変換(1)：$\Delta x_i = 1/\{(\tilde{u}_i - 1)(u_i - 1)\}\gamma\Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i$

変換(2)：$\Delta x_i = 1/(u_i\tilde{u}_i)\gamma\Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i$

変換(3)：$\Delta x_i \fallingdotseq (\beta_l - \alpha + \gamma)(\beta_l - \alpha)\gamma/(\beta_l - \alpha + \gamma)^2 \Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i$

変換(4)：$\Delta x_i \fallingdotseq (\beta_l - \alpha)(\beta_l - \alpha)/(\beta_l - \alpha)^2\gamma\Delta u_i$

$$\fallingdotseq \gamma\Delta u_i$$

となり

$$|\Delta x_i| \fallingdotseq \gamma|\Delta u_i|$$

を得る．□

この命題より次のことが分かる．

4つの型の分数変換いずれにおいても分数変換における誤差は $|\Delta x_i| \fallingdotseq \gamma|\Delta u_i|$ という形をしている．これより変換された空間で誤差 $|\Delta u_i|$ を含んでいた近似解 u_i を元の空間へ戻したときに厳密解 $\tilde{x}_i$ からのずれは $|\Delta u_i|$ の γ 倍になることが分かる．一般に γ は小さい数なので，この逆変換により元の問題の厳密解に対する誤差は，変換された空間での誤差よりも γ 倍小さくなる．言い換えると，ϵ が小さくなるほど（数値計算では分離が困難になるほど），分数変換による誤差が減少し，分数変換が有効になることが分かる．

4. 数値的な擬局所化

数値的な擬局所化というのは，数値計算によって近接根以外の根を取り除き近接根の近似解を根とする次数の下がった方程式を構成する方法である．ここでは一群の近接根からは他の根は十分離れていることを仮定する．また，近接根以外の根はある程度正確に求められていることも仮定する．

変換された空間で近接根以外の根の因子を取り除き（減次という）を行い，それを元の空間へ戻せば，擬局所化を行った多項式が得られる．このような擬局所化を繰り返して適用すればより低次の方程式が得られることになる．

分数変換された多項式を $h(u)$ で表し，それを m 回減次したものを g_m で表すことにする．すなわち，$h(u)$ の次数が n であれば，g_m の次数は $n - m$ となる．

ここでは，前章で取りあげた4つの分数変換について考える．

4.1 元の方程式の近似解を必要としない場合

(1) $a = 1, b = \alpha, c = 1, d = \alpha - \gamma\ (\gamma = k\epsilon, k \geq 1)$

この場合近接根は0付近で拡大され，それ以外の根は近接根から離れるほど1へ近づく．なぜならば，元の方程式の近接根に対応しない根は

$$\frac{\alpha - \beta_j}{\alpha - \beta_j - \gamma} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\alpha - \beta_j}} = \frac{1}{1 - \frac{k\epsilon}{\alpha - \beta_j}}$$

であった．β_j は近接根から十分離れているので，k の値を1から1000程度にとっても $|k\epsilon/(\alpha - \beta_j)| \ll 1$ ととれる．したがって上式は

$$1 + \frac{k\epsilon}{\alpha - \beta} + \left(\frac{k\epsilon}{\alpha - \beta}\right)^2 + \cdots$$

と展開でき，1に近い値となることが分かる．

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に $u-1$ を取り除くことにより，低次の新しい方程式を得る．すなわち

$$h(u) = g_m(u)(u-1)^m + g_{m-1}(1)(u-1)^{m-1} + \cdots + g_1(1)(u-1) + h(1)$$

となる $g_m(u)$ を計算することにより，これを元の空間へ戻せば m 回擬局所化を行った多項式が得られる．具体的には，組立除法等により計算すればよい．

(2) $a=0, b=\gamma, c=1, d=\alpha-\gamma\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1)$

この場合近接根は -1 付近で拡大され，それ以外の根は近接根から離れるほど0へ近づく．なぜならば，元の方程式の近接根に対応しない根は

$$\frac{-\gamma}{\beta_j-\alpha+\gamma} = \frac{-k\epsilon}{\beta_j-\alpha+k\epsilon}$$

であった．β_j は近接根から十分離れているので，k の値を1から1000程度にとっても $|k\epsilon/(\beta_j-\alpha+k\epsilon)| \fallingdotseq 0$ ととれる．

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に u を取り除くことにより，低次の新しい方程式を得る．すなわち

$$h(u) = g_m(u)u^m + g_{m-1}(0)u^{m-1} + \cdots + g_1(0)u + h(0)$$

となる $g_m(u)$ を計算することにより，これを元の空間へ戻せば m 回擬局所化を行った多項式が得られる．具体的には，u によるくくりだし等により計算すれば良い．

4.2 元の方程式の近似解を必要とする場合

(3) $a=\beta_l-\alpha+\gamma, b=(\beta_l-\alpha+\gamma)\alpha, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$

この場合近接根は0付近で拡大され，それ以外の根のうちある特定の根がちょうど1になる．

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に $u-1$ を取り除くことにより，低次の新しい方程式を得る．すなわち

$$h(u) = g_m(u)(u-1)^m$$

となる $g_m(u)$ を計算することにより，これを元の空間へ戻せば擬局所化が行える．

(4) $a=\gamma, b=\beta_l\gamma, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$

この場合近接根は -1 付近で拡大され，それ以外の根のうちある特定の根がちょうど0になる．

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に u を取り除くことにより，低次の新しい方程式を得る．すなわち

$$h(u) = g_m(u)u^m$$

となる $g_m(u)$ を計算することにより，これを元の空間へ戻せば擬局所化が行える．

4.3 擬局所化による誤差

変換(1)，(2)はまったく近似解を使用せずに擬局所化を行い，変換(3)，(4)は近接根以外の近似解を使用して擬局所化を行っている．したがって，擬局所化の誤差については，変換(1)，(2)と変換(3)，(4)の2つに分けて考える必要がある．

多項式 $f(x)$ に m 回擬局所化を行った多項式を $f_m(x)$ とし，$f_m(x)=0$ の根を$\alpha_i^{(m)}$，$\beta_j^{(m)}$ とおく．すなわち

$$f_m(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i^{(m)})\prod_{j=1}^{s-m}(x-\beta_j^{(m)})$$

である．また $f_m(x)$ に一次分数変換を適用したものを

$$g_m(u) = \prod_{i=1}^{r}(u-\tilde{\alpha}_i^{(m)})\prod_{j=1}^{s-m}(u-\tilde{\beta}_j^{(m)})$$

とする．ここに $\tilde{\alpha}_i^{(m)}=\varphi(\alpha_i^{(m)})$，$\tilde{\beta}_j^{(m)}=\varphi(\beta_j^{(m)})$ である．

このとき変換(1)，(2)の減次による誤差は，次のように与えられる．

命題 4.1 $g_{m-1}(u)=0$ の近接根に対応する根の1つを $\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ とする．$\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ に対応する $g_m(u)=0\ (m\leq s)$ の根を $\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}+\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ とし，$c_i^{(m-1)}\epsilon=\alpha_i^{(m-1)}-\alpha$，$c_{i0}^{(m-1)}\epsilon=\alpha_{i0}^{(m-1)}-\alpha$ とする．

このとき，ϵ が十分小さく，近接根以外の根 $\beta_j^{(m-1)}$ は近接根 $\alpha_i^{(m-1)}$ から十分離れていれば変換(1)，(2)に対して次が成り立つ．

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| \fallingdotseq \left|\frac{K_0}{K_1}\right|\epsilon^{s-m+1}$$

ただし，

$$K_0 = k(c_{i0}^{(m-1)}+k)^{n-m-1}$$

$$K_1 = \prod_{i\neq i0, i=1}^{r}(c_{i0}^{(m-1)}-c_i^{(m-1)}) \times \prod_{j=1}^{s-m+1}(\alpha-\beta_j^{(m-1)})$$

とする．

［証明］

ここでは，変換(1)における証明を与えておく．変換(2)においても同様である．

$$g'_{m-1}(u) = \sum_{l=1}^{r}\prod_{i=1, i\neq l}^{r}(u-\tilde{\alpha}_i^{(m-1)})$$

$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (u - \tilde{\beta}_j^{(m-1)})$$
$$+\prod_{i=1}^{r}(u - \tilde{\alpha}_i^{(m-1)})$$
$$\times \sum_{l=1}^{s-m+1} \prod_{j=1, j\neq l}^{s-m+1} (u - \tilde{\beta}_j^{(m-1)})$$

であるから $c_i^{(m-1)}\epsilon = \alpha_i^{(m-1)} - \alpha$, $c_{i0}^{(m-1)}\epsilon = \alpha_{i0}^{(m-1)} - \alpha$ に注意して

$$g_{m-1}(1) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \tilde{\alpha}_i^{(m-1)}) \prod_{j=1}^{s-m+1} (1 - \tilde{\beta}_j^{(m-1)})$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{c_i^{(m-1)} + k}$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} \frac{1}{\beta_j^{(m-1)} - \alpha + k\epsilon}$$
$$\times k^{n-m+1}\epsilon^{s-m+1}$$

$$g'_{m-1}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) = \prod_{i\neq i0, i=1}^{r} (\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} - \tilde{\alpha}_i^{(m-1)})$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} - \tilde{\beta}_j^{(m-1)})$$
$$= \frac{1}{(c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m-1}k\epsilon^{s-m+1}}$$
$$\times \prod_{i\neq i0, i=1}^{r} (c_{i0}^{(m-1)} - c_i^{(m-1)})$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (\alpha - \beta_j^{(m-1)} + c_{i0}^{(m-1)}\epsilon)$$
$$\times g_{m-1}(1)$$

を得る．また $g_m(u) = (g_{m-1}(u) - g_{m-1}(1))/(u-1)$ であるから $g_{m-1}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) = 0$ に注意して

$$g_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) = \frac{-g_{m-1}(1)}{\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} - 1}$$
$$= \frac{c_{i0}^{(m-1)} + k}{k} g_{m-1}(1)$$

$$g'_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) = [g'_{m-1}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} - 1)$$
$$+ g_{m-1}(1)]/[(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} - 1)^2]$$
$$= \frac{1}{(c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m-2}k^2\epsilon^{s-m+1}}$$
$$\times \Bigg[\prod_{i\neq i0, i=1}^{r} (c_{i0}^{(m-1)} - c_i^{(m-1)})$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (\alpha - \beta_j^{(m-1)}$$
$$+ c_{i0}^{(m-1)}\epsilon)$$
$$- (c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m}\epsilon^{s-m+1} \Bigg]$$
$$\times g_{m-1}(1)$$

を得る．一方 $g_m(u)$ は

$$g_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} + \Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})$$
$$= g_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) + g'_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$$
$$+ \cdots = 0$$

と展開できるから，$\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ が十分小さく，2 次以降の項を無視すると $\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ が求められる．すなわち

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| = \left| -\frac{g_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})}{g'_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})} \right|$$
$$= \Bigg| -k(c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m-1}$$
$$\Bigg/ \Bigg[\prod_{i\neq i0, i=1}^{r} (c_{i0}^{(m-1)} - c_i^{(m-1)})$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (\alpha + c_{i0}^{(m-1)}\epsilon - \beta_j^{(m-1)})$$
$$- (c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m}\epsilon^{s-m+1} \Bigg] \Bigg|$$
$$\times \epsilon^{s-m+1}$$

となり，ϵ が十分小さく，$\beta_j^{(m-1)}$ は α から十分離れているので

$$K_0 = k(c_{i0}^{(m-1)} + k)^{n-m-1}$$
$$K_1 = \prod_{i\neq i0, i=1}^{r} (c_{i0}^{(m-1)} - c_i^{(m-1)})$$
$$\times \prod_{j=1}^{s-m+1} (\alpha - \beta_j^{(m-1)})$$

と置けば

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| \fallingdotseq \left|\frac{K_0}{K_1}\right| \epsilon^{s-m+1}$$

を得る．□

一方，変換 (3)，(4) の減次による誤差は，分数変換に用いた β_l が少しずれたときの影響を調べればよい．これは次のように与えられる．

命題 4.2 $g_{m-1}(u) = 0$ の近接根に対応する根の 1 つを $\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ とする．$\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ に対応する $g_m(u) = 0\ (m \leq s)$ の根を $\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)} + \Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}$ とし，$c_i^{(m-1)}\epsilon =$

$\alpha_i^{(m-1)}-\alpha$，$c_{i0}^{(m-1)}\epsilon=\alpha_{i0}^{(m-1)}-\alpha$ とする．
また，近接根以外の根については $\beta_l^{(m-1)}+\Delta\beta_l^{(m-1)}=e\beta_l^{(m-1)}$ とする．
このとき，ϵ が十分小さく，近接根以外の根 $\beta_j^{(m-1)}$ は近接根 $\alpha_i^{(m-1)}$ から十分離れていれば変換(3)，(4)に対して次が成り立つ．

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| \fallingdotseq L_0\frac{e-1}{e}\left|\frac{K_0}{K_1}\right|\epsilon^{s-m+1}$$

ここで，$0<L_0<2^{s-m}$ が成り立つ．ただし，K_0,K_1 は前命題と同じものとする．

［証明］

ここでは，変換(3)における証明の手順を与えておく．変換(4)においても同様である．この場合 $c_i^{(m-1)}\epsilon=\alpha_i^{(m-1)}-\alpha$，$\gamma=k\epsilon$ とすれば

$$\begin{aligned}
g_{m-1}(1) &= \prod_{i=1}^{r}(1-\tilde{\alpha}_i^{(m-1)})\prod_{j=1}^{s-m+1}(1-\tilde{\beta}_j^{(m-1)})\\
&= \frac{1}{(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha)^{n-m+1}}\\
&\quad\times\prod_{i=1}^{r}\frac{e\beta_l^{(m-1)}-\alpha-c_i^{(m-1)}\epsilon}{c_i^{(m-1)}+k}\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{s-m+1}\frac{e\beta_l^{(m-1)}-\beta_j^{(m-1)}}{\beta_j^{(m-1)}-\alpha+k\epsilon}k^{n-m+1}\\
&\quad\times\epsilon^{s-m+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'_{m-1}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}) &= \prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}-\tilde{\alpha}_i^{(m-1)})\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{s-m+1}(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}-\tilde{\beta}_j^{(m-1)})\\
&= \Big[\,(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha)\\
&\quad\times(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha+\gamma)^{n-m}\,\Big]\\
&\quad\Big/\Big[\,(c_{i0}^{(m-1)}+k)^{n-m-1}\\
&\quad\times(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha-c_{i0}^{(m-1)}\epsilon)\\
&\quad\times k\epsilon^{s-m+1}\,\Big]\\
&\quad\times\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}\Big[\,(c_{i0}^{(m-1)}-c_i^{(m-1)})\\
&\quad/(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha-c_i^{(m-1)}\epsilon)\,\Big]\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{s-m+1}\Big[\,(\alpha+c_{i0}^{(m-1)}\epsilon\\
&\quad-\beta_j^{(m-1)})\\
&\quad/(e\beta_l^{(m-1)}-\beta_j^{(m-1)})\,\Big]\\
&\quad\times g_{m-1}(1)
\end{aligned}$$

を得る．したがって，前命題と同様の計算により

$$\begin{aligned}
|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| &= \left|-\frac{g_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})}{g'_m(\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)})}\right|\\
&= \Bigg|L_1(c_{i0}^{(m-1)}+k)^{n-m-1}k\epsilon^{s-m+1}\\
&\quad\Bigg/\Bigg[L_2\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(c_{i0}^{(m-1)}-c_i^{(m-1)})\\
&\quad/(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha-c_i^{(m-1)}\epsilon)\\
&\quad\prod_{j=1}^{s-m+1}\frac{\alpha+c_{i0}^{(m-1)}\epsilon-\beta_j^{(m-1)}}{e\beta_l^{(m-1)}-\beta_j^{(m-1)}}\\
&\quad-(c_{i0}^{(m-1)}+k)^{n-m}\epsilon^{s-m+1}\Bigg]\Bigg|
\end{aligned}$$

となる．ただし，$L_1=(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha-c_{i0}^{(m-1)}\epsilon)/(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha)$，$L_2=(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha+\gamma)^{n-m}$ である．

ϵ が十分小さく，$\beta_j^{(m-1)}$ は α から十分離れているので $L_1\fallingdotseq 1$，$L_2\fallingdotseq(e\beta_l^{(m-1)}-\alpha)^{n-m}$ となるから

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}^{(m-1)}| \fallingdotseq \left|L_0\frac{e-1}{e}\frac{K_0\epsilon^{s-m+1}}{K_1}\right|$$

であり，

$$\begin{aligned}
L_0 &= \prod_{j=1,j\neq l}^{s-m+1}\frac{e\beta_l^{(m-1)}-\beta_j^{(m-1)}}{e\beta_l^{(m-1)}-\alpha}\\
&= \prod_{j=1,j\neq l}^{s-m+1}\left(1-\frac{\beta_j^{(m-1)}-\alpha}{e\beta_l^{(m-1)}-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

は，β_l が絶対値最大であるから $\left|\frac{\beta_j^{(m-1)}-\alpha}{e\beta_l^{(m-1)}-\alpha}\right|<1$ となり，$0<L_0<2^{s-m}$ が成り立つ．□

また，近接根以外の根に対して同様の計算を行うと，$|\Delta\beta_{j0}^{(m-1)}|=O(\epsilon)$ となり，次数に関係なく減次による誤差は，$O(\epsilon)$ になるという性質があることが分かる．

ここで述べた命題や性質は，変換された空間での議論である．これらの誤差を元の空間に戻すには，命題3.1の式(4)を使えばよい．したがって，擬局所化による誤差は，ここで得られた命題や性質の結果を γ 倍してやればよく，次が成り立つ．

- 多項式 $f(x)$ に擬局所化を適用した多項式を $f_m(x)$ とすれば，その誤差は近接根に関して $O(\epsilon^{s-m+2})$ が成り立つ．

このことは，ϵ が十分小さいか，近接根以外の根の個

数 s がある程度大きければ，誤差を気にせず擬局所化が可能であることを表している．逆に，ϵ^{s-m+2} が十分小さければ，さらに擬局所化が可能なことを意味している．また，2つの命題より

- 近接根以外の根の近似解が精度良く計算されていれば，それを利用したほうが減次による誤差は減少する．

が成り立つことも分かる．

ここで述べた命題と性質を繰り返し適用すれば

$$
\begin{aligned}
c_i^{(m-1)}\epsilon &= \alpha_i^{(m-1)} - \alpha \\
&= \alpha_i^{(m-2)} + O(\epsilon^{s-m+1}) - \alpha \\
&= \cdots \\
&= \alpha_i^{(0)} + O(\epsilon^{s-m+1}) + O(\epsilon^{s-m+2}) \\
&\quad + \cdots + O(\epsilon^{s+1}) - \alpha \\
&= \alpha_i^{(0)} + O(\epsilon^{s-m+1}) - \alpha \\
&\fallingdotseq \alpha_i^{(0)} - \alpha \\
\beta_j^{(m-1)} &= \beta_j^{(m-2)} + O(\epsilon^2) = \beta_j^{(m-3)} + O(\epsilon^2) \\
&= \beta_j^{(0)} + O(\epsilon^2) \\
&\fallingdotseq \beta_j^{(0)}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，命題の記述中で $c_i^{(m-1)} = c_i^{(0)}$，$\beta_j^{(m-1)} = \beta_j^{(0)}$ という置換えを行えば，$\alpha_i^{(0)}$ からの誤差を評価することができる．この式は，数値例のところで利用するが，得られた近似解だけを利用し，誤差を事後評価するのに役に立つ．

5. 数値例

以上述べてきた理論に基づきアルゴリズムの概略を述べておく．

(1) 一変数代数方程式 $f(x) = 0$ を与える．

(2) 数式処理で厳密に一次分数変換を行い，得られた多項式を $h(u)$ とする．

(3) 多項式 $h(u)$ を必要な精度の小数で表す．

(4) 数値計算で $h(u) = 0$ を解く．必要に応じて数値的な擬局所化を行う．

(5) 得られた近似解に対し，逆の一次分数変換を行い，元の方程式 $f(x) = 0$ の近似解を得る．

この計算において，(4) の数値計算には FORTRAN77 を使用し，それ以外の数式処理には REDUCE を使用した．つまり，数式処理と数値計算を融合したハイブリッド計算を行っている．

実際の計算は，方程式を数式処理システムに与えるだけでよく，後は必要に応じ数値計算部分を呼び出すようにし，最終的な答えも数式処理システムで得られるようにした．これにより，数値計算部分も含めてすべて数式処理システムで行う場合に比べて格段に処理が速い．

分数変換を行うときにパラメータ α, ϵ, k の値を決める必要がある．一変数代数方程式の場合には，スツルムの方法を利用することもできる．しかし，筆者らは，連立代数方程式の場合も考慮し，あらかじめ近接根が存在しそうな領域を決定している．具体的には，与えられた方程式を解き，近接根と思われる領域を判定し，その範囲内に存在する近似解の重心を α とし，その重心からの最大のずれを ϵ としている．もちろん α, ϵ は，近接根の存在領域を示すのに利用するため，高精度で表す必要はない（有効数字は一桁程度で十分）．

アルゴリズムの中の数値計算部分では，連立代数方程式の場合も考慮しホモトピー接続法を利用した．以下では，このアルゴリズムに従って計算した例をいくつか示す．

例 1. 元の方程式を

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\prod_{i=-3, i\neq 0}^{5} \left(x + \frac{i}{100000000}\right)(x - 1001) \\
&(x - 10001)(x + 5001) \\
&\times (x + 50001) \\
= &\, x^{12} + 44000.00000009x^{11} \\
&- 3.4506600199604 \times 10^8 x^{10} \\
&- 2.200480044031056 \times 10^{12} x^9 \\
&+ 2503300864867958.0x^8 \\
&+ 2.252970778546198 \times 10^8 x^7 \\
&+ 1.501980519316861x^6 \\
&- 0.0000000315415908993233x^5 \\
&- 5.782624998399503 \times 10^{-15} x^4 \\
&+ 1.103955681473334 \times 10^{-22} x^3 \\
&+ 2.363116016629434 \times 10^{-30} x^2 \\
&- 8.110694802655409 \times 10^{-39} x \\
&- 1.802376622847521 \times 10^{-46}
\end{aligned}
$$

とする．この方程式を解くことにより $\alpha = 0.0$, $\epsilon = 0.0000001$ とし，$k = 1$ としてこの式に分数変換（変換 (1)）を適用すると

$$
\begin{aligned}
h(u) = &\, u^{12} - 2.031995781907879u^{11} \\
&- 0.8316267067174223u^{10} \\
&+ 3.611350069519585u^9 \\
&- 0.6062301894098922u^8 \\
&- 1.942094941994601u^7 \\
&+ 0.5061142560438811u^6 \\
&+ 0.3826821326562467u^5 \\
&- 0.07141007140231846u^4 \\
&- 0.02014960348146103u^3
\end{aligned}
$$

表2 一次分数変換による数値解
Table 2 Numerical solutions by linear fractional transformation.

No.	変換(1)
1	−.5000000000000000e−7
2	−.4000000000000000e−7
3	−.3000000000000001e−7
4	−.2000000000000000e−7
5	−.9999999999999999e−8
6	0.1000000000000000e−7
7	0.2000000000000000e−7
8	0.3000000000000002e−7
No.	**変換(3)**
1	−.5000000000000001e−7
2	−.4000000000000000e−7
3	−.3000000000000000e−7
4	−.2000000000000001e−7
5	−.1000000000000000e−7
6	0.9999999999999999e−8
7	0.2000000000000001e−7
8	0.3000000000000001e−7

$$
\begin{aligned}
&+ 0.003180461513499419u^2\\
&+ 0.0002081252081093526u\\
&- 0.00002775002774758844
\end{aligned}
$$

となる．一方近似解が −50000, 10000, −5000, 1000 と得られている場合には，これらを利用し分数変換（変換(3)）を適用する．このとき分数変換された式は

$$
\begin{aligned}
h(u) = u^{12} &- 2.031995781903815u^{11}\\
&- 0.8316267067140958u^{10}\\
&+ 3.611350069497917u^9\\
&- 0.6062301894050423u^8\\
&- 1.94209494197518u^7\\
&+ 0.5061142560378077u^6\\
&+ 0.3826821326508891u^5\\
&- 0.07141007140117589u^4\\
&- 0.02014960348109834u^3\\
&+ 0.003180461513435811u^2\\
&+ 0.0002081252081047738u\\
&- 0.00002775002774692243
\end{aligned}
$$

となる．これらの式を数値計算で解き，その解を数式処理で逆分数変換すると表2のようになる．ただし，虚部は 10^{-25}〜10^{-30} 程度でほぼ0と見なせるので省略した．

この結果から変換(1)，(3)いずれの場合も，近接した8個の根が確実に分離されて，しかも，精度良く計算されていることが分かる．

次にこの式 $h(u)$ に擬局所化（変換(1)）を適用する．ここでは，変換された空間での減次についてのみ結果を示す．擬局所化の意味では，これらの多項式を元の空間へ変換する必要があるが，ここでは省略する．他の例でも同様である．i 回減次を適用した多項式を $g_i(u)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
g_1(u) = u^{11} &- 1.031995781907879u^{10}\\
&- 1.863622488625301u^9\\
&+ 1.747727580894284u^8\\
&+ 1.141497391484391u^7\\
&- 0.8005975505102094u^6\\
&- 0.2944832944663284u^5\\
&+ 0.0881988381899183u^4\\
&+ 0.01678876678759985u^3\\
&- 0.003360836693861183u^2\\
&- 0.0001803751803617641u\\
&+ 0.00002775002774758844
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3(u) = u^9 &+ 0.9680042180921211u^8\\
&- 0.9276140524410589u^7\\
&- 1.075504742079955u^6\\
&- 0.08189804023446025u^5\\
&+ 0.1111111111008253u^4\\
&+ 0.009636967969782543u^3\\
&- 0.003638336971341946u^2\\
&- 0.0001248751248665873u\\
&+ 0.00002775002774758843
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_4(u) = u^8 &+ 1.968004218092121u^7\\
&+ 1.040390165651062u^6\\
&- 0.035114576428893u^5\\
&- 0.1170126166633532u^4\\
&- 0.005901505562527 91u^3\\
&+ 0.003735462407254633u^2\\
&+ 0.00009712543591268656u\\
&- 0.00002774968895390072
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして，近似解を利用し，減次（変換(3)）を適用すれば

$$
\begin{aligned}
g_1(u) = u^{11} &- 1.031995781903815u^{10}\\
&- 1.863622488617911u^9\\
&+ 1.747727580880006u^8\\
&+ 1.141497391474964u^7\\
&- 0.8005975505002163u^6\\
&- 0.2944832944624086u^5\\
&+ 0.08819883818848057u^4\\
&+ 0.01678876678730468u^3\\
&- 0.003360836693793661u^2\\
&- 0.0001803751803578514u\\
&+ 0.00002775002774692243
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3(u) = u^9 &+ 0.9680042180847611u^8\\
&- 0.9276140523803383u^7\\
&- 1.07550474200294u^6
\end{aligned}
$$

表3 擬局所化による数値解（変換(1)）
Table 3 Numerical solutions by pseudo-localization.

No.	変換(1) $g_1(u)$
1	−.5000000000000000e−7
2	−.3999999999999998e−7
3	−.3000000000000002e−7
4	−.1999999999999999e−7
5	−.9999999999999999e−8
6	0.1000000000000000e−7
7	0.1999999999999999e−7
8	0.3000000000000002e−7
誤差	10^{-35}
No.	$g_3(u)$
1	−.5000000000000000e−7
2	−.3999999999999995e−7
3	−.3000000000000002e−7
4	−.2000000000000001e−7
5	−.9999999999999999e−8
6	0.9999999999999996e−8
7	0.2000000000000000e−7
8	0.2999999999999999e−7
誤差	10^{-21}
No.	$g_4(u)$
1	−.4999999997870959e−7
2	−.4000000070306422e−7
3	−.2999999260997139e−7
4	−.2000003277255018e−7
5	−.9999940875907692e−8
6	0.9999856063601379e−8
7	0.2000017998336977e−7
8	0.2999993064138946e−7
誤差	10^{-14}

表4 擬局所化による数値解（変換(3)）
Table 4 Numerical solutions by pseudo-localization.

No.	変換(3) $g_1(u)$
1	−.5000000000000000e−7
2	−.4000000000000001e−7
3	−.3000000000000000e−7
4	−.2000000000000001e−7
5	−.1000000000000000e−7
6	0.9999999999999999e−8
7	0.2000000000000001e−7
8	0.2999999999999999e−7
誤差	10^{-40}
No.	$g_3(u)$
1	−.5000000000000004e−7
2	−.3999999999999988e−7
3	−.3000000000000008e−7
4	−.1999999999999998e−7
5	−.1000000000000000e−7
6	0.1000000000000000e−7
7	0.1999999999999998e−7
8	0.3000000000000002e−7
誤差	10^{-25}
No.	$g_4(u)$
1	−.500000000000235e−7
2	−.3999999999922522e−7
3	−.3000000000814309e−7
4	−.1999999996388769e−7
5	−.1000000006514906e−7
6	0.1000000015860604e−7
7	0.1999999980167443e−7
8	0.300000000764256e−7
誤差	10^{-17}

$$
\begin{aligned}
&-0.08189804022832978u^5\\
&+0.1111111110883101u^4\\
&+0.009636967968555289u^3\\
&-0.003638336970787753u^2\\
&-0.0001248751248454418u\\
&+0.00002775002774226043\\
g_4(u) = {}&u^8+1.968004218200922u^7\\
&+1.040390165597956u^6\\
&-0.03511457679216608u^5\\
&-0.1170126170598069u^4\\
&-0.005901505904830176u^3\\
&+0.0037354620706637 3u^2\\
&+0.00009712509681977337u\\
&-0.00002775002814554 85
\end{aligned}
$$

となる．これらの式を数値計算で解き，その解を数式処理で逆分数変換すると**表3**，**表4** のようになる．ただし，虚部は 10^{-35} 程度でほぼ0と見なせるので省略した．

変換(1)は，元の方程式の近似解を使用せずに擬局所化を行っている場合であるが，$g_1 \sim g_3$ までは十分精度良く計算されていることが分かる．また表の一番下の欄の誤差は，前章の最後で述べた置換えを行った式を計算した値であり，表中の数値解とよく一致している．g_4 では，$s=1$ となり誤差の影響が直接近接根に現れている．

また，変換(1)と変換(3)を比べると，$g_1 \sim g_3$ までは大差なく計算されている．しかし，g_4 においては変換(3)の方が精度が良い．これは，はじめの方程式において，もし近似解が得られているならばそれを利用して減次を行ったほうが有利であることを示している．

例 2. 50 次のチェビシェフの多項式 $T_{50}(x)$ を考える．

$$f(x) = T_{50}(x) = 0$$

$f(x)=0$ は -1 から $+1$ の範囲に解を持ち両端で近接根になっている．したがって $\alpha = 1$，$\epsilon = \frac{1}{10}$ とし，この範囲にある近接根を分離する．この例は近接根以外の根が近接根に非常に近い場合を表しており，近接根の分離という意味では悪条件になる．しかし，このような問題にも，ここで述べた方法は適用可能である．

表5　数値解（変換(1)）
Table 5　Numerical solutions.

No.	$h(u)$
1	0.9995065603657316
2	0.9955619646030800
3	0.9876883405951377
4	0.9759167619387474
5	0.9602936856769431
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{10}(u)$
1	0.9995065603657316
2	0.9955619646030800
3	0.9876883405951377
4	0.9759167619387474
5	0.9602936856769431
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{20}(u)$
1	0.9995065684387976
2	0.9955619577276302
3	0.9876883413839018
4	0.9759167619262864
5	0.9602936856769555
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{25}(u)$
1	0.9997116722154092
2	0.9953481236931984
3	0.9877279255957727
4	0.9759155042743626
5	0.9602936895876784
6	0.9408807689540377
7	0.9177546256839811

表6　数値解（変換(3)）
Table 6　Numerical solutions.

No.	$h(u)$
1	0.9995065603657316
2	0.9955619646030800
3	0.9876883405951377
4	0.9759167619387474
5	0.9602936856769431
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{10}(u)$
1	0.9995065603657316
2	0.9955619646030800
3	0.9876883405951377
4	0.9759167619387474
5	0.9602936856769431
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{20}(u)$
1	0.9995065603657316
2	0.9955619646030800
3	0.9876883405951377
4	0.9759167619387474
5	0.9602936856769431
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811
No.	$g_{25}(u)$
1	0.9995065607397773
2	0.9955619642321532
3	0.987688340654307
4	0.9759167619370948
5	0.9602936856769473
6	0.9408807689542255
7	0.9177546256839811

$f(x)$ に分数変換（変換(1)）を適用したもの $h(u)$ に，i 回減次を適用したものを $g_i(u)$ とする．このときの計算結果は表5 に示したとおりである．各解は元の方程式の解へ変換したもので実部のみ示した．虚部は 10^{-30} 程度でほぼ0と見なせる．またこの範囲内に存在する真の解は，小数点以下17桁目を四捨五入すると

0.9995065603657316, 0.9955619646030800,
0.9876883405951377, 0.9759167619387474,
0.9602936856769431, 0.9408807689542255,
0.9177546256839811

である．

次に $f(x)$ に分数変換（変換(3)）を適用する．範囲外の近似解として $\beta_l=-1$（5回），-0.9（5回），-0.8（5回），-0.7（5回），-0.6（5回）を与える．このときの計算結果は表6 に示したとおりである．

6. おわりに

代数方程式の近接根を分離するために，一次分数変換を利用した．一次分数変換を適用した方程式を解くことにより，近接根を確実に分離でき，しかもその近似解を逆一次分数変換し，元の空間へ戻すことにより単根のように高精度で計算されることが確認できた．さらに近接根から離れた根は，数値的な擬局所化を利用して方程式から取り除くことができる．しかも，次数の低下にともなう誤差も与えられる．このことは，近接根以外の根の個数が多く，近接根の近接度が強ければ誤差の少ない次数の低い方程式が得られることを表している．

参考文献

1) 小林英恒，鈴木秀男：Zeuthen's Rule について，京都大学数理解析研究所講究録 753，数式処理と数学研究への応用，pp.22–27 (1991).
2) 小林英恒，鈴木秀男：連立代数方程式の解の重複度，京都大学数理解析研究所講究録 787，非線形問題の数値解析，pp.99–112 (1992).
3) 小林英恒，鈴木秀男：連立代数方程式の解の重複度（II），京都大学数理解析研究所講究録 831，精

度保証付数値計算法とその応用，pp.1–20 (1993).

4) 小林英恒，鈴木秀男：分数変換による近接根の分離について，京都大学数理解析研究所講究録 920，数式処理における理論とその応用の研究，pp.202–215 (1995).

5) Kobayashi, H. and Suzuki, H.: The Multiplicity of a Solution of a System of Algebraic Equations, *Proc. 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization*, pp.53–64 (1992).

6) Kobayashi, H., Suzuki, H. and Sakai, Y.: The Multiplicity of a Solution of a System of Algebraic Equations II, *Proc. 1994 Winter Workshop on Computer Algebra*, pp.11–15 (1994).

7) Kobayashi, H., Suzuki, H. and Sakai, Y.: Separation of Close Roots by Linear Fractional Transformation, *Proc. 1995 ASIAN Symposium on Computer Mathematics*, pp.1–10 (1995).

8) 小林英恒，鈴木秀男，酒井明彦：分数変換による近接根の分離について，数式処理，Vol.2, No.2, pp.2–7 (1993).

9) 鈴木秀男，小林英恒：1 次分数変換を利用した 1 変数代数方程式の近接根の分離，第 51 回情報処理学会全国大会論文集（1），pp.1-3-1-4 (1995).

10) Semple, J.S. and Roth, L.: *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford (1949).

11) Sasaki, T. and Noda, M.-T.: Approximate Square-free Decomposition and Root-finding of Ill-conditioned Algebraic Equations, *J. Inf. Process.*, Vol.12, pp.159–168 (1989).

(平成 8 年 4 月 4 日受付)
(平成 8 年 11 月 7 日採録)

鈴木 秀男（正会員）

1961 年生．1985 年東京電機大学理工学部数理学科卒業．1987 年同大学大学院理工学研究科数理学専攻修士課程修了．同年雇用促進事業団神奈川技能開発センター電子計算機科勤務．1988 年東京職業訓練短期大学校情報処理科勤務．現在東京職業能力開発短期大学校勤務．数値計算，数式処理，ハイブリッド計算に関する研究に従事．日本数式処理学会会員．

小林 英恒

1945 年生．1967 年京都大学理学部数学科卒業．1969 年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了．同年日本大学理工学部助手．現在日本大学理工学部教授．理学博士．計算数学，数式処理に関する研究に従事．著書「高校数学による REDUCE 入門」（サイエンティスト社）など．日本数学会会員．