

# 反復関数系 (IFS) によるフラクタル曲面補間法

1 E - 2

原野谷 欣正 金子 博

東邦大学 情報科学科

## 1. はじめに

フラクタルモデルは自然景観を記述するのに便利であるが、多くの場合、確率的なモデルが採用され再現性のある結果が得られない欠点がある。例えば、複雑曲面を質感を保存して補間するにはフラクタル補間が有効であるが、そのためには拘束点を通るフラクタル曲線（曲面）を構成する必要がある。これは確率的なモデルでは実現しにくい。本報告では、決定論的にフラクタルを構成できるIFS（反復関数系）を利用した複雑曲面の補間法について検討した。

## 2. 反復関数システム (IFS)

$R^2$ 上の図形空間  $S(R^2)$  から  $S(R^2)$  への縮小写像（縮小係数  $k_i$ ）の組  $W_i (i=1, 2, \dots, N)$ （これをIFSという）がある時、 $\forall A \in S(R^2)$  に対して次式のような定義をする。

$$V(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N W_i(A)$$

ここで、 $V(A)$  は図形  $A$  の  $N$ 個の縮小コピーを取ってきてそれを貼り合わせてできた新しい図形を意味する。 $V(A)$  をこのように定義すると  $V$  は  $\min(k_i) = k$  を縮小係数としてまた新しい縮小写像となる。

このとき  $V$  は縮小写像定理により不動点（アトラクタ）を持つ。不動点とはその図形をいくら縮小変換しても形が変わらないものであり、不動点を  $F$  とすれば

$$F = \bigcup W_i(F)$$

となる性質を持つ。

この性質を持つ  $F$  は自分自身が自らのミニチュアによって覆われているものであり、自己相似図形つまり、フラクタル図形になる。

## 3. IFSによる曲線補間<sup>[1]</sup>

$R^2$ 上に有限個の点  $\{(x_i, y_i) \in R^2 : i=0, 1, \dots, N\}$  が与えられ、これらを補間する連続関数  $f : [x_0, x_N] \rightarrow$

$R^1$ を考える。但し、 $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$  かつ  $y_n = f(x_n) (n=0, 1, \dots, N)$  である。

$R^2$ 上の関数系  $w_n$  で

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

$n=0, 1, \dots, N$  に対して

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \text{ and } w_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

を満たすようにすると、 $0 < d_n < 1 (n=1, 2, \dots, N)$  の時、 $R^2$ 上のユークリッド距離と等価な距離に対して  $\{w_n\}$  はIFSとなる。従って縮小写像定理により、 $\{w_n\}$  はフラクタル図形となるアトラクタを持ち、定義からそれは  $(x_i, y_i)$  を通過する。なお、この時  $f$  のグラフ  $(x, f(x))$  のフラクタル次元は

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1$$

と関係付けられる。

## 4. IFSに基づく曲面補間

3. の議論を拘束点を持つ曲面のフラクタル化に利用することを考える。従来、拘束点のある面のフラクタル化にはフラクショナルブラウン運動の中点変移法が利用される。しかし、中点変移法は定常性を保てない矛盾が生じ見かけ上の不自然さを生じさせる。これに対しIFSによるフラクタル生成にはこのような矛盾はない。

3. のIFSによるフラクタル面の生成には様々な方法が考えられる。ここでは、以下の方法をとる。

図1のような矩形領域  $A_0, B_0, C_0, D_0$  上の曲面  $A, B, C, D$  をフラクタルに補間することを考える。 $X$ 方向切片  $AB, DC$  と  $Y$ 方向切片  $AD, BC$  それぞれを3. に従いフラクタル曲線で補間する。さらに  $A, B, C, D$  内部は対応する対辺を拘束点に持つ、フラクタル曲線で補間する。対応する対辺を  $X$ 方向にとるか、 $Y$ 方向にとるか、2種類のフラクタル補間曲面ができることに注意する。

Fractal Surface Interpolation

by Iterated Function System

Yoshimasa Haranoya, Hiroshi Kaneko

Department of Information Science TOHO

University

2-2-1, Miyama, Funabashi, Chiba, Japan

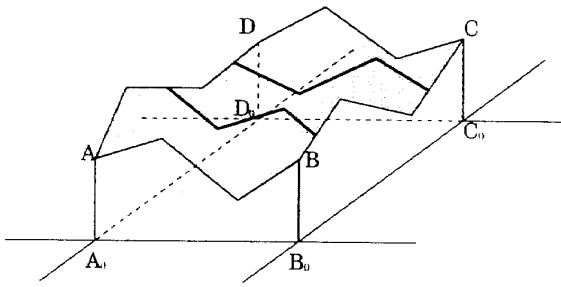


図 1: 矩形領域の補間

5. 計算機シミュレーション

以上のフラクタル面補間法を概形の少数のサンプリング点を与えて、それらからフラクタル補間によって原データを復元する問題 [2] に応用する。図 2 はカール状の窪みを 2 つ持つ山の概形から少数の標本点のみプロットしたものである。4. の方法により、アフィン変換のパラメータ  $d_n$  を変化させ復元した 2 種類のフラクタル曲面を図 3、4 に示す。標本点及び谷の部分(窪み)の概形を保ちつつもパラメータの変化によりジグザグさの異なる曲面が構成されているのがわかる。

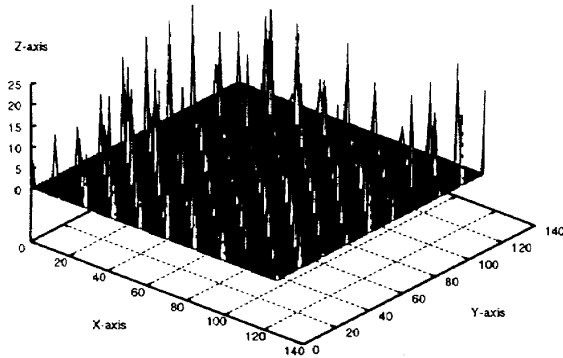


図 2: 拘束点データ

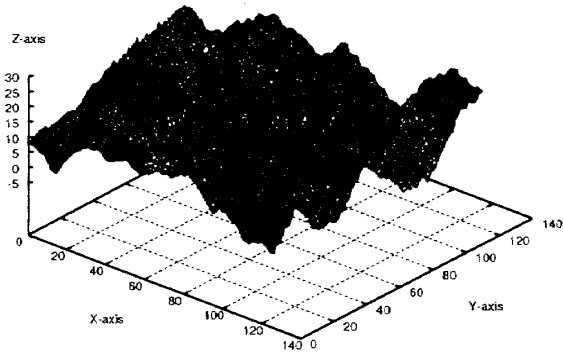


図 3: 補間データ 1

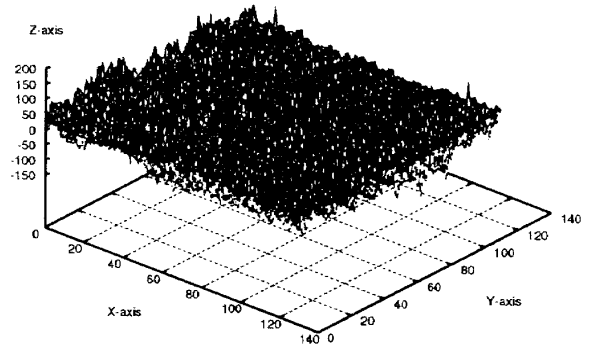


図 4: 補間データ 2

表 1 にパラメータと  $d_n$  と対応する補間曲線のフラクタル次元、及び曲面化した時のフラクタル次元を示す。曲線のフラクタル次元に単純に 1 を加えたものが曲面のフラクタル次元とならず、それよりかなり低い値となっていることが注目される。これは曲線を重ね合わせる時、隣合う補間曲線は近い軌跡をとるため、重ねる方向に垂直な方向ではフラクタル次元が小さくなるからと予想される。

パラメータ $d_n$	曲線の次元 $D_{xy}$	BoxCounting 法による曲面全体の次元 $D$
0.1	1.0	2.017 (図 3)
0.25	1.36	2.088
0.5	1.68	2.221
0.75	1.86	2.501 (図 4)

表 1: 曲線と曲面のフラクタル次元の関係

6. むすび

反復関数系による複雑曲面の補間法について検討した。提案した補間法は決定論的に拘束点を通るフラクタル補間が出来ることが、その X 軸方向及び Y 軸方向の次元と曲面の次元との関係については不明な点も多い。今後の課題としてはこのことについて理論、実験両面から検討を進めたい。

参考文献

[1] Michael F. Barnsley "Fractals Everywhere (SECOND EDITION)", Academic Press Professional(1993)

[2] 荒川賢一: "フラクタル幾何を適用した自然地形のモデリング", 電子情報通信学会論文誌, Vol. J76-D-II, No. 12, pp. 2564-2577(1993/12)