部分 k-木の l-点彩色多項式時間アルゴリズム[1]

4C−5

金成 康彰　周 暁　西関 隆夫[2]
東北大学大学院 情報科学研究科[3]

1 まえがき

グラフ G の l-点彩色とは，正の整数 l に対して高々 l の距離にあるどの2点も同じ色を持たないように G の全ての点を彩色することである．図1に2-点彩色の例を示す．ここで，2点間の距離とは2点を結ぶ道で用いられる辺数が最小である道の辺数のことをいう．普通の点彩色は明らかに $l=1$，即ち1-点彩色である．グラフ G の l-点彩色に必要な最小の色数を G の l-点彩色数といい，$\chi_l(G)$ と書く．G のある l-点彩色 φ に対して，明らかに $1 \leq \chi_l(G) \leq n$ であり，与えられたグラフには必ず l-点彩色が存在するはずである．l-点彩色問題とは，与えられたグラフ G に対し最適な l-点彩色，即ち $\chi_l(G)$ 色による l-点彩色を求める問題である．一般には普通の点彩色問題はNP-完全であるので，l-点彩色問題もNP-完全である．従って，一般のグラフに対しては効率の良いアルゴリズムは存在しそうにない．部分 k-木とは単純グラフでグラフの幅が高々 k であるものをいい，部分 k-木は木の一般化と考えることができる．また，部分 k-木のクラスには木 $(k=1)$，外平面グラフおよび直並列グラフ $(k=2)$，Halin グラフ $(k=3)$ などが含まれる．部分 k-木に対しては点彩色問題を含む多くのNP-完全問題が線形時間または多項式時間で解けることが知られている [1, 2, 3, 6, 8, 9]．しかし，l-点彩色問題については部分 k-木に対して多項式時間で解けることが知られていない．本文では k, l が定数とした場合に部分 k-木に対して l-点彩色問題を解く多項式時間逐次アルゴリズムを与える．

2 準備

本節では，定義をいくつか与える．本文では，入力のグラフ $G=(V,E)$ として自己ループも多重辺もない単純グラフを扱う．ここで，V は点集合，E は辺集合である．G の点集合を $V(G)$，辺集合 $E(G)$ と表すこともある．G の点数を n とする．点 u と点 v を結ぶ辺を $e=(u,v)$ で表す．グラフ G 中の点 $u, v \in V(G)$ 間の距離を $\mathrm{dist}_G(u,v)$ で表す．根，内点，子，葉は通常の意味で用いる．l-点彩色を関数 $\varphi: V \rightarrow C$ で表す．$C=\{1,2,\ldots,|C|\}$ は l-点彩色に使われる色の集合である．

k-木のクラスは以下のように再帰的に定義される．

(a) k 点の完全グラフは k-木である．

(b) グラフ $G=(V,E)$ が k-木であり，G の k 個の点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ が G の完全部分グラフを誘導するとき，新しい点 w と k 本の辺 (v_i, w), $1 \leq i \leq k$, を G に付け加えて得られたグラフ $G'=(V \cup \{w\}, E \cup \{(v_i,w) | 1 \leq i \leq k\})$ も k-木である．

(c) k-木とは (a) から (b) を繰り返し適用して得られたグラフである．

k-木の部分グラフが部分 k-木である．従って，部分 k-木は単純グラフで $|E| < kn$ である．本文では k は定数とする．図2に3-木の生成過程の例を示し，図3に図2の部分3-木を示す．

グラフ $G=(V,E)$ の分解木 $T=(V_T, E_T)$ とは，以下の全ての条件を満たすものである．ここで，V_T を点集合 V の部分集合族とする．

- T の節点数は $O(n)$ 個である．
- $\bigcup_{X_i \in V_T} X_i = V$.
- 各辺 $(v,w) \in E$ に対して $v, w \in X_i$ なる少なくとも1つの葉 X_i がある．
- 各内点 X_i は丁度2つの子をもつ．それらを X_L と X_R とすると，$X_i = X_L$ または $X_i = X_R$ である．
- 全ての節点 $X_i, X_j, X_h \in V_T$ に対して，もし節点 X_i から節点 X_j へ行く木 T 上の道に X_h があれば，$X_i \cap X_j \subseteq X_h$ である．

分解木 $T=(V_T,E_T)$ の幅とは $\max_{X_i \in V_T} |X_i| - 1$ のことである．グラフ G の幅とは G の全ての分解木の最小の幅のことである．幅が高々 k であるグラフ G を部分 k-木という．k が定数のとき部分 k-木の幅 k の分解木は線形時間で求められることが知られている [2]．各辺 $e=(v,w) \in E$ に対して，$v, w \in X_i$ なる T の任意の葉 X_i を選び，その葉を $rep(e)$ と書く．次に，以下のように T の各節点 X_i に対して辺集合 $E(X_i) \subseteq E$ を定義する．もし X_i が T の葉ならば，$E_i = \{e \in E | rep(e) = X_i\}$ とする．もし X_i が2つの子供 X_L と X_R をもつ T の内点ならば，$E_i = E_L \cup E_R$ とする．2つの辺集合 E_L と E_R は互いに素である．従って T の節点 X_i は E_i 中の辺に誘導される G の部分グラフ $G[E_i]$ に

[1] A Polynomial-Time Algorithm for Finding l-Vertex-Colorings of Partial k-Trees
[2] Yasuaki Kanari, Xiao Zhou and Takao Nishizeki
[3] Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
Aramaki Aza Aoba 05, Aobaku Sendai 980-8579, Japan

対応する．部分グラフ $G[E_i]$ を単に $G[X_i]$ または G_i と書く．そのとき G_i は2つの部分グラフ G_L と G_R の辺素な和集合である．つまり G_L と G_R は X_i の中でのみ点を共有する．$V(G_i)$ を V_i と書く．

3 多項式時間逐次アルゴリズム

本文のアルゴリズムの主要なアイデアは動的計画(DP)法を用いることであり，その際にDP法で用いる表の大きさを多項式数程度にしているので，全体の計算時間を多項式時間に抑えることができる．入力を部分 k-木 $G = (V, E)$ とし，X_i を2進分解木 T の節点とする．φ を G_i の l-点彩色とし，$\xi : C \to C$ を C の置換とする．そのとき，明らかに φ と ξ の合成 $\xi \circ \varphi$ は G_i の l-点彩色である．

各2点 $u, v \in V_i$ に対してグラフ G_i における $\mathrm{dist}'_{G_i}(u,v)$ を以下のように定義する．

$$\mathrm{dist}'_{G_i}(u,v) = \begin{cases} \mathrm{dist}_{G_i}(u,v) & \text{if } \mathrm{dist}_{G_i}(u,v) \leq l, \\ \infty & \text{if } \mathrm{dist}_{G_i}(u,v) > l. \end{cases}$$

以降，距離とは dist′ のことを指すものとし，距離の値の集合を $J = \{0, 1, 2, \ldots, l, \infty\}$ とする．写像 $\rho : X_i \times J \to \{0, 1, \ldots, |C|\}$ を節点 X_i の count という．G_i のある点彩色 φ の count ρ_φ は，全ての $v \in X_i$, $j \in J$ に対して以下を満足するものとする．

$$\rho_\varphi(v,j) = |\{c \in C| \min_{u \in V_i, \varphi(u)=c} \mathrm{dist}'_{G_i}(v,u) = j\}|.$$

X_{root} を分解木 T の根とする．もし G_i の l-点彩色 φ が $G = G[X_{root}]$ の l-点彩色 φ^* に拡張できるならば，φ は拡張可能であるという．ここで，以下の補題を与える．

補題 3.1 G_i の2つの l-点彩色 φ と ψ が同じ count をもつとする．そのとき φ が拡張可能であるための必要十分条件は，ψ が拡張可能であることである．

従って，節点 X_i における count は G_i の l-点彩色の同値類として利用できる．節点 X_i における count ρ が active であるとは，$\rho = \rho_\varphi$ となるような l-点彩色 φ が存在することである．全ての active count の数は高々 $(|C| + 1)^{(k+1)(l+2)}$ 個である．T の各葉 X_i の count は全ての彩色：$X_i \to \{1, 2, \ldots, \min\{|X_i|, |C|\}\}$ の個数が定数個であることから定数時間で求まる．T の各内点 X_i の count が active であるかどうかは，X_i の子供の count より

$$O((|C| + 1)^{(k+1)(l+2)^{k+2}})$$

時間で判定できる．また，全ての葉及び内点の数は $O(n)$ 個であり，$|C| = O(n)$ である．従って，次の定理を得る．

定理 3.1 $G = (V, E)$ を n 点の部分 k-木とし，幅 k 以下の2進分解木が与えられているとする．このとき k, l が定数ならば，部分 k-木に対する l-点彩色問題を多項式時間で解くことができる．

参考文献

[1] H. L. Bodlaender. "Polynomial algorithm for graph isomorphism and chromatic index on partial k-trees." *Journal of Algorithms*, 11, No.4, pp.631–643, 1990.

[2] H. L. Bodlaender. "A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small tree width." *SIAM Journal on Computing*, 25, pp.1305–1317, 1996.

[3] R. B. Borie, R. G. Parker and C. A. Tovey. "Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of probrems on recursivery constructed graph families." *Algorithmica*, 7, pp.555–581, 1992.

[4] V. G. Vizing. "On an estimate of the chromatic class of a p-garph." *Discret Analiz*, 3, pp.25–30, 1964.

[5] V. G. Vizing. "The chromatic class of a multigraph." *Kibernetica*, 3, pp.29–39, 1965.

[6] X. Zhou and T. Nishizeki. "Algorithms for finding f-coloring of partial k-trees." In *Proc. of the Sixth International Symposium on Algorithms and Computation*, Lect. Notes in Computer Science, volume 1004, pp.332–341, Springer-Verlag, 1995.

[7] X. Zhou and T. Nishizeki. "The edge-disjoint paths problem is NP-complete for partial k-trees." submitted to a workshop.

[8] X. Zhou, S. Nakano and T. Nishizeki. "A linear algorithm for edge-coloring partial k-trees." In *Proc. of the First Europian Symposium on Algorithms, Springer-Verlag*, Lect. Notes in Computer Science, 726, pp.409–418, 1993.

[9] X. Zhou, S. Nakano and T. Nishizeki. "Edge-coloring partial k-trees." *Journal of Algorithms*, 21, pp.598–617, 1996.

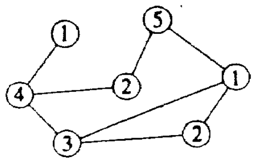

図 1: 2-点彩色の例

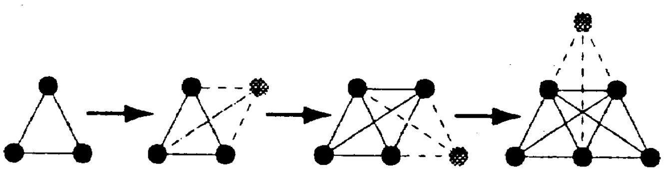
図 2: 3-木の生成過程

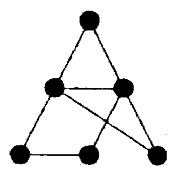
図 3: 部分 3-木