3C－9 Delaunay四面体対対角変形による3次元 Dynamical Lagrangian Remeshing(DLR法) とその課題

定別当 忠明　本田 理恵
高知大学大学院理学研究科

1 はじめに

有限要素法などの手法を用いた数値シミュレーションではメッシュが逐次変形するため、動的なメッシュの再構築が必要となってくる。2次元における問題についてはDelaunay対角変形に基づく手法(Dynamical Lagrangian Remeshing；DLR法 (Braun&Sambridge、1994)) が報告されている。この手法は、Delaunay対角変形によって局所的にDelaunay三角形分割（3次元ではDelaunay四面体分割）を得ることで、Delaunayと非Delaunayが混在する三角形分割からDelaunay三角形分割へ全体的に変換していくというものである。

本稿ではこの手法を3次元へと拡張したアルゴリズムを提案する。また、その際楔型の四面体対が非Delaunay四面体分割である場合には対角変形が困難となるが、その問題点についても述べる。

2 Delaunay対角変形

凸四角形に対して三角形分割を行う場合、図1の2種類の三角形分割しか存在しない。

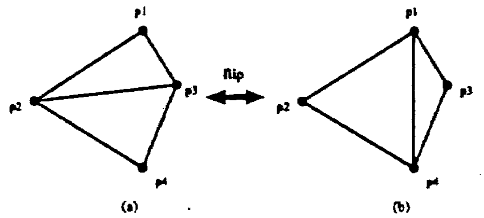

図1　2次元での対角変形

この4点が同一円周上にないとすると、これらのうち片方がDelaunay三角形分割、もう片方が非Delaunay三角形分割となる。このとき、この2種類の三角形分割のうちの片方から他方に変換する操作を対角変形 (flip) といい、特に非Delaunay三角形分割からDelaunay三角形分割へと変換する操作をDelaunay対角変形 (Delaunay diagonal flip) という。

3次元においては凸六面体に対して同様の関係が成立する。凸六面体を四面体分割するには、図2で示すように2種類の四面体分割が考えられる。このとき、これら5点が同一球面上にはないとして、四面体対の共有面に含まれていない片方の四面体の頂点がもう一方の四面体の頂点に外接する球の外部に存在する場合をDelaunay四面体分割、そうでない場合（球の内部に存在する場合）を非Delaunay四面体分割という。片方がDelaunay四面体分割であれば、もう片方は非Delaunay四面体分割であることおよびその逆は証明できる。よって図2 (a)(b) の通りDelaunay-非Delaunayの対角変形が成立し、この対角変形を3次元DLR法の基礎とすることができる。

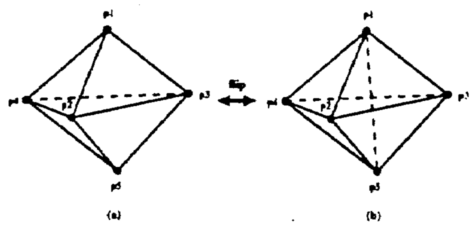

図2　3次元での対角変形
四面体の個数は (a) では2個、(b) では3個である

3 アルゴリズム

3次元でのDLR法のアルゴリズムを次に示す。前提として、四面体分割の中で図2 (a) の集合を集合T_2、図2 (b) の集合を集合T_3と呼ぶことにする。

1. もともと存在する四面体分割を集合T_2、T_3それぞれの集合に振り分ける。

2. 集合T_2の要素に対して、Delaunay四面体分割かどうかの判定を行う。

   (a) Delaunay四面体分割であった場合、その次の集合T_2の要素に移行する。

   (b) 非Delaunay四面体分割であった場合、Delaunay対角変形を行う。

   (c) 非Delaunay四面体分割でありDelaunay対角変形ができない場合、保留としておく。

Delaunay diagonal flip for Three-dimensional Dynamical Lagrangian Remeshing(DLR) method and the problems
Tadaaki Joubettou Rie Honda
Dept. of Information Science, Faculty of Science, Kochi University
2-5-1 Akebono-cho Kochi 780-8520 Japan

3. 集合 T_3 の要素に対して、Delaunay 四面体分割かどうかの判定を行う。
   (a) Delaunay 四面体分割であった場合、その次の集合 T_3 の要素に移行する。
   (b) 非 Delaunay 四面体分割であった場合、Delaunay 対角変形を行う。
4. 全ての要素に対して判定、対角変形が終わった後、Delaunay 対角変形を行った回数を判定し、1以上の場合は2に戻る。

2.(c) での保留される要素とは、図3で示すような楔型の四面体対を指す。この四面体対を対角変形しようとすると、新しく結ばれる辺が四面体対の共有面の外部に出てしまい、新しくできる3つの四面体は重なってしまう。これに対する対策は今後の課題である。

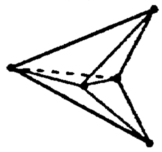

図3　楔型の四面体対

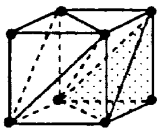

図4　立方格子の分割

4　実験と結果

上述のアルゴリズムを基にプログラムを作成し、実験を行った。四面体分割の初期状態は、x、y、z 方向に5個ずつ立方格子を配置し、各立方格子を図4の通りに分割したものとする。それからそれぞれの点をランダムに移動させる。移動の振幅は格子間隔1に対して、0〜0.5 の間のランダムな値である。これに3節で述べた DLR 法を適用し、Delaunay 四面体分割に更新する。この過程を 10 サイクル繰り返したものを1ケースとして、初期状態の異なる１００ケースについて試行を行った。

図5に総四面体対数の１０サイクルでの変動を、図6に保留した要素の個数の１０サイクルでの変動を示す。総四面体対数は初期状態では全て集合 T_2 の要素であるため、集合 T_2 から集合 T_3 への対角変形が相対的に多くなり、やや増加傾向にあるものの、保留される要素に増加する傾向はなく、基本的には安定なアルゴリズムであるといえる。なお、1サイクルの計算に要した処理時間は、UltraSPARC-IIi 270MHz で 20 秒程度である。

ただし、四面体要素が点の移動により重なった場合についての例外処理は付け加えていないため（今回は重なった場合には、点の移動量を再計算するようにしている)、検討が必要である。また、保留した要素の個数は全体から見るとそれほど大きな値ではないが、より完全な Delaunay 四面体分割を得ようとすると問題となる可能性がある。現在、解決法として Voronoi 図構成算法の適用 [2] やより多くの四面体対によるメッシュの再構築などを検討中である。

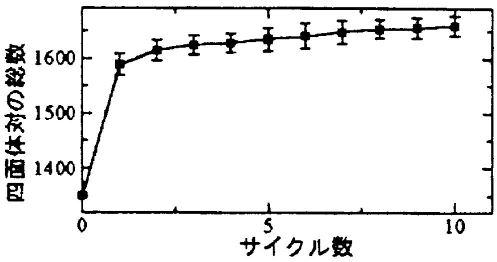

図5　１０サイクルでの総四面体対数（１００ケース平均)

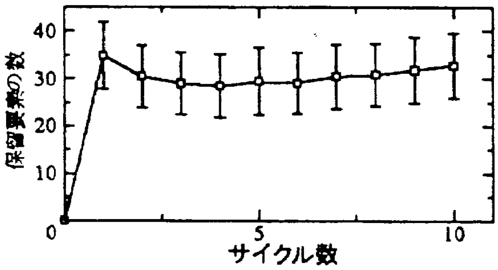

図6　１０サイクルでの保留要素数（１００ケース平均)

5　おわりに

本稿では、有限要素法などメッシュが逐次変形する状況での動的なメッシュの再構築の手法を示した。基本的には安定なアルゴリズムであることが示されたが、楔型の四面体対が Delaunay 四面体分割ではない場合には保留とするしかないという問題がある。また、四面体要素の重なりの排除の問題も残っている。これらの問題についてよりよい解決法を検討していく予定である。

参考文献

[1] Braun J&Sambridge M,"Dynamical Lagrangian Remeshing(DLR): A new algorithm for solving large strain deformation problems and its application to fault-propagation folding",Earth Planet Sci. Lett.124,pp211-220(1994)

[2] 稲垣宏 杉原厚吉," 3次元ドロネー図の構築における退化に起因する問題点とその対策",電子情報通信学会論文誌 D-II Vol.J79-D-II No.10,pp1696-1703(Oct. 1996)