

ブロック法による行列の対角化

5D-1

別府良孝
愛知学院大学・情報社会政策学部

1. はじめに

密な実対称行列 A に関する標準固有値問題 $AV = VE$ を解くための算法としては、中継行列として三重対角行列を用いる方法がよく知られている。ここで、E は固有値行列、V は固有ベクトル行列であるが、中継行列として準対角行列 A' を用いる算法のパフォーマンスを調べたので報告する。

2. 算 法

まず、次元数 n の正方行列 A を、次元数がそれぞれ $n/2$ のミニ正方行列 A_1, A_2, B, B^T に分解する。

A_1 と A_2 の固有ベクトル行列 V_1 と V_2 を素早く求める。

V_1 と V_2 を対角要素にもつ直交行列 U を用いて、A を直交変換して準対角行列 A' をうる。

A' を、ヤコビ法や直接 QR 法によって完全対角化する。

$$A \quad V = \quad V \quad E$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ B^T & A_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A_1 V_1 = V_1 D_1 \\ A_2 V_2 = V_2 D_2 \end{array}$$

$$U = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

$$A' = U^T A U = \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \diagdown & \\ & & \diagup & \\ & & & \diagdown \end{bmatrix}$$

3. 結 果

行列 A を最初から最後まで回転変換を用いて対角化する方法を“伝統ヤコビ法”と呼ぼう。それに対し、 V_1 と V_2 をハウスホルダー・QR法で求めて準対角行列 A' を回転変換のみを用いて対角化する方法を“準対角 + ヤコビ法”と呼ぼう。256次元のテスト行列を、VPP500（単一PE、ベクトルモード）を用いて完全対角化するのに要したCPU時間（秒）を以下に示す。中継行列として準対角行列を用いることの効果が見て取れる。

	F 行列	B 行列	R 行列	H 行列
伝統ヤコビ法	50.0	25.4	53.0	50.2
準対角 + ヤコビ法	35.1	4.7	52.4	35.8