情報演算処理の符号化に関する２，３の考察

４Ｆ－９

今井　幸雄
東海大学短期大学部

1　はじめに

近年，情報処理システムの発展に伴って，サンプリング周波数すなわちレートを種々変えたディジタル信号処理システムが盛んに研究されている．その処理システムを用いて，音声，画像，信号圧縮理論，通信のフィルタバンク，変復調技術，ウェーブレット理論等に利用され，提案実用化されている．それらの基礎的事項として，フーリエ，ウォルシュおよびハール関数の定義，性質，サンプルレート変換および高速変換技術等がある．それらについて２，３考察したのでご報告する．各種関数による変換の演算量についても検討考察した．

2　ハール関数および変換

サンプル点Nのハール関数$H_{mn}{}^{k}$，a_nのハール変換A_mの定義と例を示す．

ハール関数H_{mn}の定義：

m=0に対して

$$H_{0n}{}^{k}=\ 1(n=[0\sim N-1])$$

m=1に対して

$$H_{1n}{}^{k}=\begin{cases}1(n=[0\sim \frac{N}{2}-1])\\ -1(n=[\frac{N}{2}\sim N-1])\end{cases}$$

$m=2,3,\cdots,\frac{N}{2}-1$と$k=1,2,\cdots,2^{m-1}$に対して

$$H_{mn}{}^{k}=\begin{cases}1(n=[(k-1)N2^{-m+1}\sim(2k-1)N2^{-m}-1])\\ -1(n=[(2k-1)N2^{-m}\sim kN2^{-m+1}-1])\\ 0([0\sim(k-1)N2^{-m+1}-1]\cup[kN2^{-m+1}\sim N-1])\end{cases}$$

ただし，Nはサンプル点で，[～]内が逆順の場合は[ϕ]とする．$H_{mn}{}^{k}$を要素とする行列$(H_{mn}{}^{k})$を改めて(H_{mn})とする． N=8の場合のハール関数H_{mn}の例：

$$(H_{mn})=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\4\\ \downarrow 5\\ \blacksquare 6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}0&1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\ \rightarrow n\\ \begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&-1&-1\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

N=8の場合のハール逆関数$H_{mn}{}^{-1}$の例：

$$(H_{mn})^{-1}=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\\4\\ \downarrow 5\\ \blacksquare 6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}0&1&2&3&8&5&6&7\end{matrix}\ \rightarrow n\\ \begin{pmatrix}1&1&2&0&4&0&0&0\\1&1&2&0&-4&0&0&0\\1&1&-2&0&0&4&0&0\\1&1&-2&0&0&-4&0&0\\1&-1&0&2&0&0&4&0\\1&-1&0&2&0&0&-4&0\\1&-1&0&-2&0&0&0&4\\1&-1&0&-2&0&0&0&-4\end{pmatrix}\end{array}$$

a_nのハール変換A_mと逆変換の定義：

$$A_m=\sum_{n=0}^{N-1}a_nH_{mn},\qquad a_n=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}A_mH_{mn}{}^{-1}$$

ただし，m，nは0～(N−1)の値をとる．H_{mn},$H_{mn}{}^{-1}$は0,±1,±2,±4,…の値なので，ハール変換と逆変換操作は入力の反転か非反転ビット移動の加算演算である．すなわち，本論文ではそのハール変換と逆変換操作における乗算回数は0回と解釈する．フーリエ変換における変換核の周波数列はウォルシュ変換では波数列に対応している．ハール変換における変換核では周期の異なる位置を含んだ単パルス列である．

N=8の場合の高速ハール変換ダイアグラムの例：木構造と加減算処理により高速ハール変換および逆演算処理が可能である．

FHTバタフライの定義：

a_m ┌ a_m+a_n
—⊕ - - - -
a_n └ a_m-a_n

FHTアルゴリズムをダイアグラムとして次ページに示す．フーリエ変換およびウォルシュ変換の場合も同様に考察できる．

3　各種演算定義と展開式

2進畳込み演算の場合

ハール逆変換を用いて，畳込み演算を次に示す．畳込み演算式の中のf_m，$h_{(n\circledast m)}$にハール逆変換式を代入する．すなわち，畳込み演算をF_k,H_l(k,l:0～N−1)の展開式と解釈する．

"Study on the Fast Processing", Yukio Imai,
Tokai Univ. Jun. Coll., Tokyo, 1088619 Japan

サンプル点$N=2^S=8$の高速ハール変換(FHT)のダイアグラム：

N=1	N=2	N=4	N=8 ：サンプル点
(S=0)	(S=1)	(S=2)	(S=3) ：段階
a_0	a_0+a_1	$+(a_0+a_1)+(a_2+a_3)$	$A_0=+(a_0+a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)$
a_1	a_2+a_3	$+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)$	$A_1=+(a_0+a_1+a_2+a_3)-(a_4+a_5+a_6+a_7)$
a_2	a_4+a_5	$A_2=+(a_0+a_1)-(a_2+a_3)$	
a_3	a_6+a_7	$A_3=+(a_4+a_5)-(a_6+a_7)$	
a_4	$A_4=a_0-a_1$		
a_5	$A_5=a_2-a_3$		
a_6	$A_6=a_4-a_5$		
a_7	$A_7=a_6-a_7$		

ここで，バタフライの演算$\circledast$は前の段階の上から下までの２つの和の組と差の組の集まりである．… は和と差の組との間の境界線である．

２進畳込み演算$\circledast_n$の定義と展開式：

$\circledast_n=$

$$\sum_{m=0}^{N-1} f_m h_{(n\oplus m)}=\sum_{m=0}^{N-1}\{(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k W_{km})(\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} H_l W_{l(n\oplus m)})\}$$

ただし，$m,n=0\sim(N-1)$である．$\oplus$は各ビットの排他的論理和の記号である．F_k, H_lに対する$\circledast_n$の展開式において $\sum_{m=0}^{N-1} W_{km}W_{l(n\oplus m)}$ の値はF_kH_lの係数値である．

畳込み演算および相関演算の場合も同様に考察できる．２進畳込み演算の積和項に関する補題と定理を次に示す．

補題：　$\circledast_n$の展開式において積和F_kH_l項の数はN^2個である．証明は上の展開式から明らかである．

定理：　$\circledast_n$の展開式において積和F_kH_k項の数は$N+\sum_{k=1}^{\log(N/2)} 2^{k-1}(2^k-1)$個である．

証明は上の展開式と和積展開公式$F_kH_l \pm F_lH_k=(F_k \pm H_l)(F_k+H_l)-(F_kH_k \pm F_lH_l)$より明かである．

定理より，２進畳込み演算$\circledast$における乗算回数の比較を表に示す．(1)は直接法；(2)はFHT法の場合である．

N	4	8	16	32	64	128	256
(1)	16	64	256	1024	4096	16384	65536
(2)	5	15	51	187	715	2795	11051

4　おわりに

ハール関数は+1,-1と0の値をもつ３値の直交関数であり，ハール変換はコンピュータ処理がしやすく，ハード；ソフト両面の設計において，簡単化可能で能率が良い．ハール関数と逆関数の性質を調べ，高速ハール変換アルゴリズムを見い出した．２進畳込み演算の乗算回数の比較を行った．その結果より，高速ハール変換を用いた２進畳込み演算は乗算回数面で有効性が認められた．ハール関数，変換の応用例として，ウェーブレット解析；秘話通信；画像圧縮；音響処理；音声合成；テレビ；ファクシミリ；フラクタル画像処理装置の設計等がある．２次元への拡張問題については現在検討中である．

[1] 今井幸雄，宅間俊則：”情報演算処理の高速化に関する２，３の考察”，情処学第55回H9後全大，4F-01

[2] 所報，1996 東海大学短期大学部情報通新技術研究所