

# 半空間プリミティブと3値論理代数系に基づく多面体の記述

岡田 稔<sup>†1</sup> 金 環 垣<sup>†2</sup>  
横井 茂 樹<sup>†3</sup> 鳥脇 純一郎<sup>†4</sup>

本論文では、コンピュータ・グラフィックス (CG) における幾何モデリングの一手法として、半空間に基づく多面体の記述方法を提案する。まず、複数の平面に基づく半空間の多項集合演算によって、任意の多面体を記述するための S 式表現を定義する。次に、定義された多面体と空間の点との位置関係 (内部, 境界, 外部) を表すための 3 値論理関数, および, S 式表現による 3 値論理代数系を定める。この 3 値論理代数系が先に定義した集合演算系に対して準同型であることから、多面体を記述する S 式がそのまま 3 次元空間の直線と多面体の交差判定に利用可能であることを示し、本方法が CG における光線追跡法を始めとする画像合成のための幾何モデリングの一手法として有効であることを示す。

## A Description of a Polyhedron Based on Half-space Primitives and a Three-element Logical Algebraic System

MINORU OKADA,<sup>†1</sup> KYUNG-EUN KIM,<sup>†2</sup> SHIGEKI YOKOI<sup>†3</sup>  
and JUN-ICHIRO TORIWAKI<sup>†4</sup>

A method to describe a polyhedron for geometrical shape modeling in Computer Graphics is studied. A polyhedron is constructed from some half-spaces using a multi-term set operation system with S-expression. A three-element logical function and its algebraic system are defined in order to determine whether the nominated point is within the given polyhedron or not. Since this logical function is homomorphic and the multi-term set operation system and three-element logical algebraic system are homomorphic, the S-expression to describe a polyhedron can be used for the crossing test between a view line and the polyhedron. The proposed method is useable for geometrical modeling and rendering in image synthesis by ray-tracing.

### 1. はじめに

コンピュータ・グラフィックス (CG) において、計算機によって効率良く画像を合成するためには形状の定義が簡単な幾何モデラが必要である。現在用いられている代表的な形状記述の方式として、CSG (Constructive Solid Geometry) 表現, および, B-rep (Boundary representations) がある<sup>1)</sup>。これらはある意味で相補

的な幾何形状表現の方式であり、大まかにいえば、B-rep が人間の境界に基づく論理的な思考に基づく形状認識に対応するのに対して、CSG 表現は積み木操作に代表される人間の直感的な形状把握の方法に対応するともいえる。

ところで、CG において多面体を表示する際には、3 次元空間において視線方向を表す直線と多面体表面との交点 (より詳しくは可視の交点) を求める処理 (以下、交差判定という) がきわめて頻繁に行われる。B-rep における多面体の交差判定では、三角形分割による方法が優れており多用されているが、CSG における交差判定にそれを適用するのは容易ではない。このため CSG に適した交差判定の方法が模索されてきた<sup>2),3)</sup>。

本論文では、閉半空間と S 式表現による多項集合演算によって任意の多面体を記述する方法, および, その画像合成への応用<sup>4)</sup>について述べる。すなわち、全

<sup>†1</sup> 名古屋大学情報処理教育センター  
Education Center for Information Processing, Nagoya University

<sup>†2</sup> 韓国江原大学校電子計算学科  
Department of Computer Science, College of Natural Sciences, Kangweon National University, Korea

<sup>†3</sup> 名古屋大学情報文化学部  
School of Informatics and Sciences, Nagoya University

<sup>†4</sup> 名古屋大学工学部  
School of Engineering, Nagoya University

空間は平面によって2つの領域に分割されるが、同様に複数の平面群によって、それぞれに対応する複数の半空間群が定義される。これら、複数の半空間の集合演算は多面体を構成するが、この演算は本論文ではLispなどに用いられるS式を準用して記述される。さらに、空間の点と多面体の包含関係を示す3値命題論理およびその3値論理結合からなる3値論理代数系を定義する。この3値論理代数系がS式表現による集合演算に対して準同型であることから、S式が前述の交差判定にそのまま利用できる。

CSGに基づく幾何モデリングによって画像合成する際の光線（視線）と対象物体の交差判定の方法を検討した従来の研究として以下のものがあげられる。Rothは、光線上の物体の存在範囲をプリミティブごとにセグメント化し、各セグメントの境界に挟まれた区間において2値論理を用いた内部、外部判定を行う方法<sup>2)</sup>を示しているが、論理和、論理積、論理差のみの検討であり、任意の論理式に関する言及はされていない。また、村上らは、視線の位置に関する漸進的衝突判定と2値論理状態木に基づくCSG手法<sup>3)</sup>を示している。そこでは、全プリミティブに基づく状態木の変化を検出しているが、具体的な衝突検出アルゴリズムは明記されていない。一方、Tiloveは3値論理に基づく空間の分類方法の基本的な考え方<sup>5)</sup>を示したが、画像合成を目的とした具体的な形状記述方法、および交差判定の方法には言及していない。さらに、杉原らは定義物体表面を構成する平面群の交差状況（頂点の発生など）の厳密な判定方法<sup>6)</sup>を示し、位相的に安定な幾何アルゴリズムについての先駆的研究を行っている。

これらとの関係でいえば、本論文は、村上らの方法に対してプリミティブごとに交差計算アルゴリズムを用意する必要がないこと、Rothの方法に対しては任意の論理式を扱うことができること、Tiloveの考え方を多面体に限定して実際の幾何モデリングに適用するための基礎的検討を行ったこと、杉原らの方法とは異なる側面での数値誤差回避を行うこと、に対応している。さらに、具体的な多面体の記述法およびCSGによる直接的な交差判定の方法を明らかにするものである。本論文の手法は、比較的単純な記述方式であるにもかかわらず、3値論理の導入によって多面体の稜線等における数値演算誤差による不正な穴空きなどが現れにくいなどの性質を有する。なお、本論文は提案する3値論理代数系のCSGモデリングへの有効性を示すことが目的であり、総括的に他のモデリング方式に対する優位性を主張するものではない。しかしながら、本方式はB-repではきわめて困難な、曲面プリミティ

ブを含む曲面多面体への拡張<sup>7)</sup>が容易であること、それに基づいた複雑な形状モデリングへの応用例<sup>8),9)</sup>があるなどの点でその有効性が確認されている。

以下、2章では、本手法のプリミティブとなる、平面に基づく閉半空間を定義する。3章では、複数の閉半空間の間のS式表現による多項集合演算系とその性質について述べる。4章では、注目点と半空間の包含関係を解析するためのS式表現による3値論理代数系を定義し、先の多項集合演算系との準同型性について述べる。5章では実際の多面体の具体的な定義方法、光線追跡法<sup>1)</sup>における光線と多面体との交差判定の方法、および画像合成例を示すことによって、本方法のCGにおける幾何モデリングへの有効性を示す。

## 2. 閉半空間

ここでは、多面体を構成するための最下位プリミティブとなる閉半空間を定義し、その性質を考察する。

### 2.1 3次元空間における平面と空間部分集合

#### 【定義】1 (全空間 $\Omega$ )

空間  $\Omega$  は、3次元 Euclid 空間  $R^3$  であり、特に、全体集合または全空間という。 ■

以後、3次元 Euclid 空間  $R^3$  を単に3次元空間、または空間という。また、 $\Omega$  の部分集合を領域という。3次元空間における次の平面  $S$ ,

$$S: f(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x} - d = 0, (d \geq 0) \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = (a, b, c): \text{単位法線ベクトル}$$

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$$

において、平面方程式(1)の左辺を関数値とする関数  $f(\mathbf{x})$  の負、零、正に基づき、全空間  $\Omega$  は3つの互いに排反な部分集合  $\omega_I, \omega_B, \omega_O$ 、すなわち、

$$\omega_I = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) < 0\}$$

$$\omega_B = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = 0\}$$

$$\omega_O = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) > 0\}$$

に分割される(図1)。ここで、 $S$ の単位法線ベクトル  $\mathbf{N}$  は2つ存在するため、 $\omega_I$  と  $\omega_O$  は特定できない。そこで以下に示す  $\mathbf{N}$  の向きの規則に基づく係数符号の正規化によって  $\omega_I$  を一義に決定する。

- (1)  $d \neq 0$  のとき、原点を含まない領域の方向。
- (2)  $(d = 0) \wedge (c \neq 0)$  のとき、 $z > 0$  の象限  $(\pm, \pm, +)$  の方向。
- (3)  $(d = c = 0) \wedge (b \neq 0)$  のとき、 $y > 0, z = 0$  の象限  $(\pm, +, 0)$  の方向。
- (4)  $(d = c = b = 0) \wedge (a \neq 0)$  のとき、 $x > 0$  の象限  $(+, 0, 0)$  の方向。

ここで、上記の  $(\pm, +, 0)$  等の表現は、3次元空間の各象限(象限数8)を表し、 $+$ ,  $\pm$ ,  $0$  は、それぞ

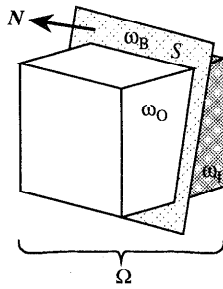


図1 全空間と平面Sによる3つの部分集合

Fig. 1 The universal space  $\Omega$  and three subsets defined by a surface S.

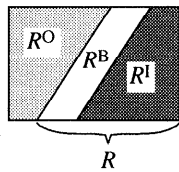


図2 閉領域Rの内部 $R^I$ , 境界 $R^B$ , 外部 $R^O$

Fig. 2 Inside  $R^I$ , boundary  $R^B$  and outside  $R^O$  with respect to a closed region R.

れ3軸における正象限, 正負両象限, 正象限と負象限の境界, を意味する. この結果,  $\omega_O$  は平面に対して  $N$  の向く側であり,  $\omega_I$  はその反対側, 通常は原点を含む側となる. なお, 本論文で提案する手法に対しては,  $N, \omega_I, \omega_O$  が一義に決定されればよく, 上記の規則はその一例にすぎない.

【定義】2 (閉半空間)

平面  $S$  によって決定される領域  $R_S$ ,

$$R_S = \omega_I \cup \omega_B = \{x | f(x) \leq 0\}$$

$$S: f(x) = N \cdot x - d = 0, (d \geq 0)$$

(ただし  $N = (a, b, c), d$  は前述の正規化規則に従う) を, 閉半空間という. ■

ここで定義された閉半空間は, 本論文で提案する CSG 表現の最下位プリミティブとなるものである. 以後, 点集合を単に領域という. また, 3章で述べる閉半空間の集合演算によって生成される閉集合と, 閉半空間を合わせて閉領域という. 閉集合, あるいは境界集合は, 集合論的には  $\epsilon$  近傍を用いて定義<sup>10)</sup>されるが, 本論文での境界集合は平面(上の多角形)上の点の集合である. また, 以後, 文脈によって, 集合, 領域という用語を用いるが, 実体は同じである.

【定義】3 (閉領域の内部, 境界, 外部)

閉領域  $R$  の集合の意味での境界, 内点の集合, 外点の集合をそれぞれ, 閉領域  $R$  の境界:  $R^B$ , 内部:  $R^I$ , 外部:  $R^O$  という (図2). ■

表1 BNFによるS式の記述文法  
Table 1 Syntax of S-expression by BNF.

$\langle s\text{-expr.} \rangle$	::= ' ( $\langle operator \rangle$ $\langle list \rangle$ ' )
$\langle operator \rangle$	::= 'and'   'or'   'not'
$\langle list \rangle$	::= $\langle term \rangle$   $\langle s\text{-expr.} \rangle$   $\langle nil \rangle$ [ $\langle list \rangle$ ]

3. 多項集合演算系とその性質

ここでは領域  $R_a, R_b$  に対する集合演算<sup>11),12)</sup>,

$$\text{集合和: } R_a \cup R_b = \{x | x \in R_a \vee x \in R_b\}$$

$$\text{集合積: } R_a \cap R_b = \{x | x \in R_a \wedge x \in R_b\}$$

$$\text{補集合: } R_a^c = \{x | x \notin R_a\}$$

に基づいて, 多項集合和, 多項集合積, 準補集合から構成される多項集合演算系を定義するとともに, その性質を示す. 以下, 本論文では, = を等値,  $\rightarrow$  を2値命題の含意の意味で用いる. さらに, 連言  $\wedge$  は選言  $\vee$  に優先するものとする.

3.1 閉空間に対する集合演算とS式表現

集合和演算子  $\cup$ , 集合積演算子  $\cap$  は, 一般にはともに2項演算子として定義されている. 集合和演算と集合積演算は交換律, 結合律が成り立つことから, 多項演算に自然に拡張することができる. また, 被演算項がない演算を便宜的に考え, 0項演算という. 以下, 0項演算, 単項演算を含めて多項演算という.

また, これらの多項演算を具体的に記述するために, Lisp で用いられるS式 (S-expr.) の記述形式,

$$(\langle operator \rangle \text{ term}_1 \text{ term}_2 \dots \text{ term}_n)$$

を用いる.  $\langle operator \rangle$  の部分に演算記号,  $\text{term}_i$  の部分に被演算項 (閉領域など) が置かれる. 具体的な記法は各演算の定義において示す. また, 形式的なS式の定義を表1に示す. 本論文において, S式は, 多項集合演算を表現するとともに, 4章で述べる多項3値論理演算を記述するのにも用いられる. また, 本論文では支障のない限りにおいて説明, 表現の便宜上, 通常の論理式とS式を混用する.

【定義】4 (多項集合和演算)

$n$  個 ( $n \geq 0$ ) の被演算項  $\{R_i | 1 \leq i \leq n\}$  について, 2項集合和,

$$R_s^0 = \Phi (= \text{空集合})$$

$$R_s^i = R_s^{i-1} \cup R_i (1 \leq i \leq n)$$

によって定まる  $R_s^n$  を  $n$  項集合和といい, S式では, (or  $R_1 R_2 \dots R_n$ ) と記述する. ■

〈補題〉1 (加法結合律と加法交換律)

任意の閉領域  $R_1, R_2, R_3$  に対して\*,

\* ここでは2項演算について示しているが, 多項演算においても同様に示される.

$$(or R_1(or R_2 R_3)) = (or(or R_1 R_2) R_3)$$

$$(or R_1 R_2) = (or R_2 R_1)$$

□ (証明略)

補題 1 により, 代数系  $(R, (or))$  は半可換群である.

【定義】5 (多項集合積演算)

$n$  個 ( $n \geq 0$ ) の被演算項  $\{R_i | 1 \leq i \leq n\}$  について, 2 項集合積,

$$R_p^0 = \Omega (= \text{全空間})$$

$$R_p^i = R_p^{i-1} \cap R_i (1 \leq i \leq n)$$

によって定まる  $R_p^n$  を  $n$  項集合積といい, S 式では,  $(and R_1 R_2 \dots R_n)$  と記述する. ■

〈補題〉2 (乗法結合律と乗法交換律)

任意の開領域  $R_1, R_2, R_3$  に対して\*,

$$(and R_1 (and R_2 R_3)) = (and (and R_1 R_2) R_3)$$

$$(and R_1 R_2) = (and R_2 R_1)$$

□ (証明略)

補題 2 により, 代数系  $(R, (and))$  は半可換群である.

【定義】6 (準補集合 (semi-complement))

閉集合  $R$  の補集合  $R^C$  と, 境界集合  $R^B$  の和集合,

$$R^{SC} = R^C \cup R^B$$

$$= \{x | x \notin R \vee x \in R^B\}$$

を準補集合といい  $R^{SC}$ , S 式では  $(not R)$  と記述する. ■

準補集合演算は単項演算のみとする. 準補集合  $R^{SC}$  は, 補集合  $R^C$  に対して境界要素を保存するという意味での拡張であり, 本論文で提案する CSG 表現方法において重要な概念である.

〈定理〉1 (境界集合と準補集合の境界集合)

任意の閉集合  $R$  について,

$$R^B = (R^{SC})^B$$

□ (証明は付録)

〈定理〉2 (閉領域の集合演算)

閉領域間の多項集合演算  $(or)$ ,  $(and)$ ,  $(not)$  の結果は閉領域である.

□ (証明略)

すなわち, 閉領域を被演算項として用いている限り, 定義された多項集合演算系によって開集合が生成されることはない.

〈定理〉3 (拡張 De Morgan の法則)

任意の閉集合  $R_1, R_2, \dots, R_n$  について,

$$(not(or R_1 R_2 \dots R_n))$$

$$= (and(not R_1)(not R_2) \dots (not R_n))$$

$$(not(and R_1 R_2 \dots R_n))$$

$$= (or(not R_1)(not R_2) \dots (not R_n))$$

□ (証明は付録)

定理 3 は, 補集合の代わりに準補集合を用いても De Morgan の法則が形式的に成り立つことを示す. 定理 3 によって, 次のような双対関係が成り立つ.

$$and \Leftrightarrow or, not \Leftrightarrow not, \Omega \Leftrightarrow \Phi$$

### 3.2 閉半空間と S 式による多面体の定義

任意の  $n$  面凸多面体は,  $n$  個の閉半空間または, 閉半空間の準補集合の  $n$  項集合積のみで表すことができる. また, 任意の多面体は, 適当な整数  $m$  を選ぶと  $m$  個の凸多面体の  $m$  項集合和のみで表すことができる. したがって, 3.1 節で述べた S 式表現で任意の多面体を記述することが可能である. 逆に, 定理 2 によって, 閉半空間のみをプリミティブとしている任意の S 式表現は, ある多面体 (半無限部分空間を含む) を記述している. 以後, 本論文の範囲では, 閉半空間, あるいは開領域は使用されない.

## 4. 3 値論理代数系とその性質

ここでは, 3 次元空間中の任意の点  $x$  が, 閉半空間またはそれによって定義された多面体と, どのような包含関係にあるのかを解析するための 3 値論理代数系を定義し, その代数的性質<sup>10)~12)</sup>を考察する.

### 4.1 3 値命題論理

3 次元空間中の任意の点  $x$  が閉領域  $R$  とどのような包含関係にあるか, すなわち,

$$x \in R^I : x \text{ は } R \text{ の内部にある.}$$

$$x \in R^B : x \text{ は } R \text{ の境界にある.}$$

$$x \in R^O : x \text{ は } R \text{ の外部にある.}$$

を示す 3 値命題  $\Sigma$  を与える, 以下のような 3 値命題関数  $\Sigma = F[x; R]$  を考える.

【定義】7 (3 値命題の真理値)

点  $x$  と閉集合  $R$  に関する, 3 値命題関数  $\Sigma = F[x; R]$  の真理値を次のように定義する.

$$(x \in R^I) \rightarrow (F[x; R] = I)$$

$$(x \in R^B) \rightarrow (F[x; R] = B)$$

$$(x \in R^O) \rightarrow (F[x; R] = O)$$

### 4.2 3 値論理結合とその真理値

4.1 節で述べた 3 値命題論理に基づいて, 多項の被演算項に対する 3 値論理結合, すなわち, 3 値論理和, 3 値論理積, および 3 値論理否定を定める.

【定義】8 (3 値論理和)

点  $x$  と 2 つの閉領域  $R_1, R_2$  に関する 3 値命題  $\Sigma_1 = F[x; R_1]$ ,  $\Sigma_2 = F[x; R_2]$  において, 表 2(a) に定める真理値に基づく 3 値論理結合を 3 値論理和と

\* ここでは 2 項演算について示しているが, 多項演算においても同様に示される.

表2 3値論理演算の真理値表  
Table 2 Truth table of the three value logic.

$\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$	I	B	O
I	I	I	I
B	I	B	B
O	I	B	O

$\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$	I	B	O
I	I	B	O
B	B	B	O
O	O	O	O

$\Sigma$	$\neg^* \Sigma$
I	O
B	B
O	I

いい, 記号  $\vee^*$  を用いて,  $\Sigma_1 \vee^* \Sigma_2$  と表現する. さらに点  $\mathbf{x}$  と  $n$  個 ( $n \geq 0$ ) の領域  $\{R_i | 1 \leq i \leq n\}$  に関する命題  $\{\Sigma_i = F[\mathbf{x}; R_i] | 1 \leq i \leq n\}$  において, 2項3値論理和,

$$\Sigma_S^0 = O$$

$$\Sigma_S^i = \Sigma_S^{i-1} \vee^* \Sigma_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

で定まる  $\Sigma_S^n$  を  $n$  項3値論理和といい, S式では  $(or \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_n)$  と記述する. ■

〈補題〉3 (加法結合律と加法交換律)

任意の3値命題  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  に対して\*,  
 $(or \Sigma_1 (or \Sigma_2 \Sigma_3)) = (or (or \Sigma_1 \Sigma_2) \Sigma_3)$   
 $(or \Sigma_1 \Sigma_2) = (or \Sigma_2 \Sigma_1)$

□ (証明略)

補題3により, 代数系  $(\Sigma, (or))$  は半可換群である.

【定義】9 (3値論理積)

点  $\mathbf{x}$  と2つの閉領域  $R_1, R_2$  に関する3値命題  $\Sigma_1 = F[\mathbf{x}; R_1], \Sigma_2 = F[\mathbf{x}; R_2]$  において, 表2(b)に定める真理値に基づく3値論理結合を3値論理積といい, 記号  $\wedge^*$  を用いて,  $\Sigma_1 \wedge^* \Sigma_2$  と表現する. さらに点  $\mathbf{x}$  と  $n$  個 ( $n \geq 0$ ) の領域  $\{R_i | 1 \leq i \leq n\}$  に関する命題  $\{\Sigma_i = F[\mathbf{x}; R_i] | 1 \leq i \leq n\}$  において, 2項3値論理積,

$$\Sigma_P^0 = I$$

$$\Sigma_P^i = \Sigma_P^{i-1} \wedge^* \Sigma_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

で定まる  $\Sigma_P^n$  を  $n$  項3値論理積といい, S式では,  $(and \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_n)$  と記述する. ■

〈補題〉4 (乗法結合律と乗法交換律)

任意の3値論理値  $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$  に対して\*,  
 $(and \Sigma_1 (and \Sigma_2 \Sigma_3)) = (and (and \Sigma_1 \Sigma_2) \Sigma_3)$   
 $(and \Sigma_1 \Sigma_2) = (and \Sigma_2 \Sigma_1)$

□ (証明略)

補題4により, 代数系  $(\Sigma, (and))$  は半可換群で

ある.

【定義】10 (3値論理否定)

点  $\mathbf{x}$  と閉領域  $R$  に関する3値命題  $\Sigma = F[\mathbf{x}; R]$  において, 表2(c)に定める真理値に基づく3値論理結合を3値論理否定といい, 記号  $\neg^*$  を用いて  $\neg^* \Sigma$  と表現する. さらに, S式では  $(not \Sigma)$  と記述する. ■

〈定理〉4 (拡張 De Morgan の法則)

任意の3値命題  $\{\Sigma_i | 1 \leq i \leq n\}$  について,

$$(not (or \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_n)) = (and (not \Sigma_1) (not \Sigma_2) \dots (not \Sigma_n))$$

$$(not (and \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_n)) = (or (not \Sigma_1) (not \Sigma_2) \dots (not \Sigma_n))$$

□ (証明は付録)

定理4は, 3値命題においても De Morgan の法則が形式的に成り立つことを示している. 定理4によって, 次のような双対関係が成り立つ.

$$and \Leftrightarrow or, not \Leftrightarrow not, O \Leftrightarrow I, B \Leftrightarrow B$$

4.3 集合演算と3値論理代数系の準同型性

ここでは, 3章で示した集合演算系と, 4.2節で示した3値論理代数系の準同型性について述べる.

定義7では, ある点  $\mathbf{x}$  に基づいて, 閉領域  $R$  から3値命題  $\Sigma$  への写像を与える関数として  $F[\mathbf{x}; R]$  を定めた. この写像を用いて次の性質が示される.

〈定理〉5 (3値論理和と集合和に対する3値命題の恒等性)

$$(or F[\mathbf{x}; R_1] F[\mathbf{x}; R_2] \dots F[\mathbf{x}; R_n]) = F[\mathbf{x}; (or R_1 R_2 \dots R_n)]$$

□ (証明は付録)

〈定理〉6 (3値論理積と集合積に対する3値命題の恒等性)

$$(and F[\mathbf{x}; R_1] F[\mathbf{x}; R_2] \dots F[\mathbf{x}; R_n]) = F[\mathbf{x}; (and R_1 R_2 \dots R_n)]$$

□ (証明は付録)

〈定理〉7 (3値論理否定と準補集合に対する3値命題の恒等性)

$$(not F[\mathbf{x}; R]) = F[\mathbf{x}; (not R)]$$

□ (証明は付録)

定理5, 6, 7によって,  $\Sigma = F[\mathbf{x}; R]$  すなわち, 写像  $R \xrightarrow{F} \Sigma$  は多項演算  $(or), (and), (not)$  に関して準同型写像である. したがって, 多項集合演算系,  $\mathcal{A} = (R, (or), (and), (not), \Omega, \Phi)$

は, 3値論理代数系,

$$\mathcal{B} = (\Sigma, (or), (and), (not), I, O, B)$$

に対して準同型であることが分かる. ここで, 写像  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$  は, 全射であるが単射ではない. さらに, 同型ではないため, 代数系  $\mathcal{B}$  には代数系  $\mathcal{A}$  に対応要素

\* ここでは2項演算について示しているが, 多項演算においても同様に示される.

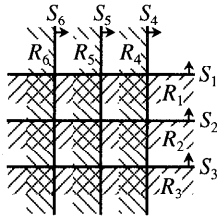


図3 平面と閉半空間

Fig. 3 Planes and concerned closed half-spaces.

がない B が存在する。

以上のことから、多項集合演算系で定義された多面体  $R$  を記述する S 式は、3 値論理代数系において、ある点  $x$  の多面体  $R$  に対する包含関係（内部、外部、境界）を示す S 式としてそのまま使用できる。

5. 多面体の記述と交点判定

ここでは、3 章で示した閉半空間による多面体の記述に基づいて、実際の多面体の記述方法、および記述された多面体と直線の交差判定方法について述べる。

5.1 S 式による多面体の記述

1 つの平面は、1 つの閉半空間を定める。平面を定める方式は種々あるが、本研究では、便宜的に平面上にある 3 点を用いて平面を定める方法を用いる。

ここでは理解を容易にするために、以後、2 次元空間について説明するが、3 次元についても、同様に考察される。例として、図 3 のように平面（2 次元では直線） $S_i$  とともに閉半空間  $R_i$  を定める。同図において、実線は平面、ハッチは領域、矢印は正規化された法線ベクトルを表す。次に、図 3 で定義された閉半空間を用いて、構成的に多面体を記述する例を図 4 に示す。図 4 (a), (b) は、

$$R_A = (and R_1(not R_3)R_4(not R_6))$$

$$R_B = (or(not R_2)R_5)$$

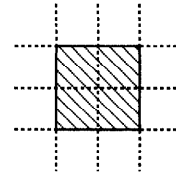
によって記述される多面体を表している。さらに、 $R_A, R_B$  の集合積によって図 4 (c) に示す多面体  $R_C$ ,

$$R_C = (and R_A R_B) \\ = (and (and R_1(not R_3)R_4(not R_6)) \\ (or(not R_2)R_5))$$

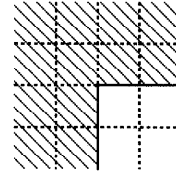
が記述される。

5.2 点の 3 値論理評価

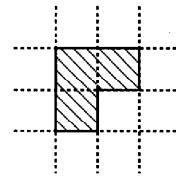
S 式によって定義された多面体  $R$  に対して、光線との交点候補群  $\{p_i | 1 \leq i \leq n\}$  を求めた後、交点候補  $p_i$  の  $R$  に対する包含関係を求める手続きを 3 値論理評価という。この 3 値論理評価を行うためには以下のアルゴリズムによる。



(a)  $R_A = (and R_1(not R_3) R_4(not R_6))$



(b)  $R_B = (or(not R_2) R_5)$



(c)  $R_C = (and R_A R_B) \\ = (and (and R_1(not R_3) R_4(not R_6)) \\ (or(not R_2) R_5))$

図4 構成的な多面体の定義

Fig. 4 Constructive definition of a polyhedron.

【3 値論理評価アルゴリズム】

- (1) 前提:対象物体は、 $n$  個の平面群  $\{S_j | 1 \leq j \leq n\}$  と S 式によって定義された  $m$  面体である（必ずしも  $m = n$  ではない）。
- (2) 多面体を定義する S 式の項となっている各半空間  $\{R_j | 1 \leq j \leq n\}$  に対する点  $p_i$  の 3 値論理値（定義 7） $\{\Sigma_{ij} | 1 \leq j \leq n\}$  を求める。すなわち、

(2-1)  $i = j$  ならば  $\Sigma_{ij} = B$

(2-2)  $i \neq j$  ならば式 (1) の  $f_j(p_i)$  の符号の判定により、

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} I & \text{if } f_j(p_i) < 0, \\ B & \text{if } f_j(p_i) = 0, \\ O & \text{if } f_j(p_i) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

- (3)  $\{\Sigma_{ij} | 1 \leq j \leq n\}$  を項とする、多面体を定義する S 式と同型の S 式を考え、定義 8, 9, 10 によって S 式の 3 値論理値を求める。 □

5.3 多面体と光線の交差判定

CG における光線追跡法などによる画像合成において、対象物体の幾何形状に関する基本的処理は、光線と物体表面の交点を計算すること（以下、単に交差判定という）である。たとえば、鏡面あるいは透明物体

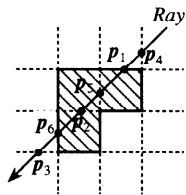


図5 交点判定の様子

Fig. 5 Judgement of crossing between a ray and a polyhedron.

を含む光線追跡においては、2分木の再帰構造によってこの交差判定が行われる<sup>1)</sup>。この交差判定は、「対象物体表面と光線のすべての交点のうち、視点から正方向にある最近の交点を求める」と要約される。本論文で提案している形状定義方法では、以下に示すアルゴリズムによって交差判定を行うことができる。ここでは5.1節で定義した  $R_C$  を多面体の例として用い、図5にその処理の様子を示す。

【交差判定アルゴリズム】

- (1) 前提：対象物体  $R$  は、 $n$  個の平面群  $\{S_i | 1 \leq i \leq n\}$  によって定義された  $m$  面体である (必ずしも  $m = n$  ではない)。

例) 平面群： $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

- (2) 光線と、すべての平面との交点  $\{p_i | 1 \leq i \leq n\}$  を求め、これを交点候補群とする。交点候補群が空である場合は交点なしとする。

例) 交点候補群： $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$

- (3) 【3値論理評価アルゴリズム】を用いて交点候補群から真の交点群  $\{p_i | F[p_i; R] = B\}$  を選択する。真の交点群が空であれば交点なしとする。

例) 真の交点群： $\{p_1, p_6\}$

- (4) 真の交点群より、視点から最も近い正方向の点を可視交点とする。正方向の交点がない場合は交点なしとする。

例) 可視交点： $\{p_1\}$  □

以上のアルゴリズムを基本処理として、光線追跡法などによる画像合成が行われる。ここで示したアルゴリズムの計算量は、平面の数  $n$  に対して最悪でも  $O(n^2)$  である。一方、従来より用いられる三角形パッチ分割による交差判定の計算量は、三角形パッチの数  $n$  に対して最悪でも  $O(n)$  であるが、パッチ分割処理そのものの計算量は記述方法と対象の形状に大きく左右され、単純な比較は容易ではない。

さて、光線が最終的に平面  $S_i$  に含まれる注目多角形との交点  $p_i$  を持つものとする、 $S_i$  により決定される半空間  $R_i$  に対する  $p_i$  の3値論理値  $\Sigma_i$  は数値

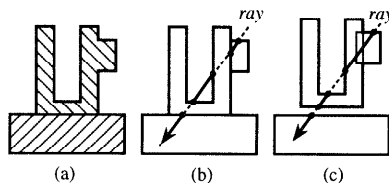


図6 ガラスのテーブルに置かれた把手付きのガラスのコップ  
Fig. 6 A glass 'with' a handle 'on' a table.

計算なしに一義に  $B$  と定められ、交点候補となる。ところで、ある多角形 (平面  $S_i$  に含まれるものとする) が他の多角形 (平面  $S_j$  に含まれるものとする) と接続される場合 (多面体の稜線部など) においては、従来の三角形パッチ分割法などでは稜線部における「筒抜け」により穴が生じる可能性がある。しかし、本方法では視線が稜線部を (偶然に) 通過する場合においても  $p_i, p_j$  の少なくともどちらか一方が真の交点と判定されるため、そのような「筒抜け」は生じない。しかしながら、一方では次節で述べるような副作用が生じるが、これらの両立は今後の課題である。

5.4 偽境界の発生

本論文による多面体記述法、交差判定法では、偽境界が発生する場合がある。それは、

$$R_{or} = (or R(not R))$$

$$R_{and} = (and R(not R))$$

のような場合であり、本論文の目的では、前者  $R_{or}$  は全空間  $\Omega$  を、後者  $R_{and}$  は空空間  $\Phi$  を表すのが自然である。これらによって次のような問題が生じる。

- (1)  $R_{or}$  は集合演算系では  $\Omega$  となるが、内部点である平面上の点を3値論理代数系で評価すると、その3値論理値は  $B$  となり、偽の交点が具現する。
- (2)  $R_{and}$  は集合演算系では  $R^B$  となり、外部点である平面上の点を3値論理代数系で評価すると、その3値論理値は  $B$  となり、偽の交点が具現する。

(1) は、本方法を光線追跡法による不透明物体の画像化に用いる場合では問題とはならないが、透明物体の画像化に用いる場合では物体の内部に偽の界面を生成する。典型的には図6(a)に示すような、ガラスのテーブルに置かれた把手付きのガラスのコップのような場合にみられる。ここで、光線 (ray) 上の点 (●) は交点、実線は物体内部、破線は物体外部を表す (屈折は無視している)。(2) は、不透明物体の画像化においても、物体が存在しない位置に偽の界面を生成する (図6(b))。いずれの場合でも、同一平面を用いないようにするなどの方法によって簡易的な回避が可

```
(or(and(not(or R1 R2 R3 R4 R9 R10 R22 R11 R13))
      (or R5 R6 R7 R8 (not R12))
      (or(not R14) R15 R16)
      (or(not R14) R17 R18))
  R19)
```

図7 多面体の定義リストの例

Fig. 7 An example of the definition list of a polyhedron.

能(図6(c))であるが、本質的な解決は今後の課題である。

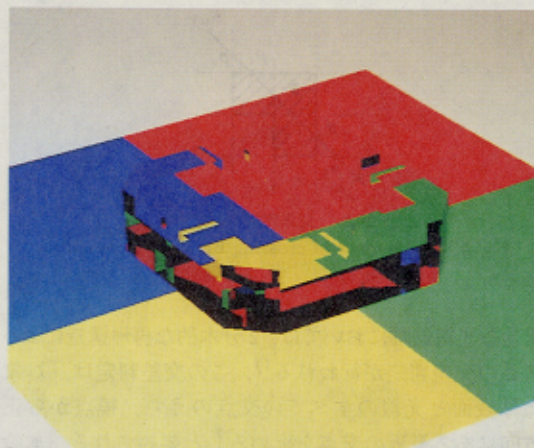
### 5.5 画像合成実験例

本方法を光線追跡法に対して適用した実験例を図7, 図8に示す。図7では、実際の多面体の定義のためのS式を示す(各平面の定義は省略)。図7のS式では、19個の閉半空間によって30面体の灰皿(屈折率1.53の透明物体)を記述している。このS式により、画素数512×512の光線追跡法による合成画像を図8に示す。同図(a)は単純パターンを、(b)はスキャナ入力したデジタル画像を背景とした。画像生成に要した時間は、使用計算機Sun4/110にて約10分(ターンアラウンド)であった。ただし、光線追跡法で通常用いられる高速化技法(外接球判定など)は用いていない。なお、5.3節で述べた三角形分割(パッチ数92)に基づく画像生成では約4分(パッチ分割時間を含まず)であった。

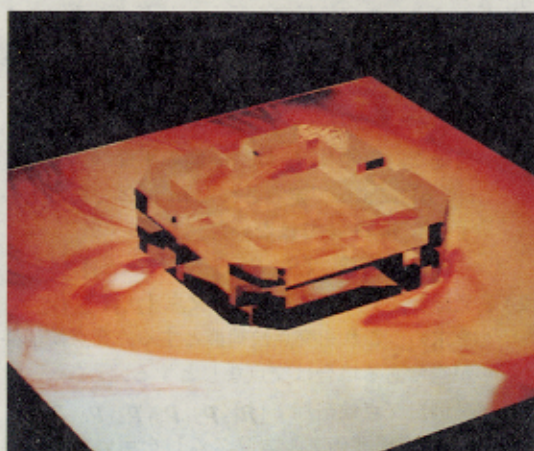
## 6. おわりに

本論文では、CSGに基づく多面体の記述方法、および、記述された多面体と直線の交差判定の一方法を示した。まず、半空間をプリミティブとし、その多項集合演算系に基づく多面体を記述する方法を示した。次に、領域に対する点の状態値を定める関数と3値論理代数系、すなわち、ある点が半空間とどのような関係にあるかを与える3値論理関数とその3値論理結合を定義した。さらに、3値論理代数系は、空間の多項集合演算系に対して準同型であることから、多面体のS式による記述形式をそのまま視線と多面体の交差判定に用いることが可能であることを示した。本方法では、内部、外部に加えて境界というクラスを導入した3値論理に基づいており、数値演算誤差による稜線等における不正な穴空き等が生じにくい、という性質がある。

本論文で示したS式による多面体の記述方法は単純であるものの、ユーザが思い浮かべている形状が複雑な場合、それをただちにS式で表現することは自明な作業ではない。このため、会話的にS式および付随情報を生成できるようなマンマシン・インタフェース<sup>13)</sup>



(a)



(b)

図8 図7のリストによる形状モデルの合成画像

Fig. 8 A synthesized image based on the list in fig. 7.

を備えることが望ましい。今回は平面による半空間に基づく多面体のみを対象としているが、曲面による半空間に基づく曲面多面体の扱いに関する詳細な検討<sup>7)</sup>とその応用<sup>8),9)</sup>、および、5.4節で示した偽境界問題の解決が課題となっている。

## 参考文献

- 1) 日本図学会編: CG ハンドブック, 森北出版(1989).
- 2) Roth, S.D.: Ray Casting for Modelling Solids, *CGIP*, Vol.18, pp.109-144 (1982).
- 3) 村上公一, 松本 均: CSG 表現からの画像生成方式, 第27回情報処理学会全国大会論文集, 2M-5, pp.1533-1534 (1983).
- 4) 金 環根, 岡田 稔, 横井茂樹, 鳥脇純一郎: 半空間集合の CSG 表現形状データに対する光線追



跡アルゴリズムの検討, 信学技報, パターン認識と理解, PRU88-129, pp.33-40 (1989).

- 5) Tilove, R.B.: Set Membership Classification: A Unified Approach to Geometric Intersection Problems, *Trans. IEEE, COMP.*, Vol.C-29, No.10, pp.874-883 (1980).
- 6) 杉原厚吉, 伊理正夫: 計算誤差による暴走の心配の無いソリッドモデラの提案, 情報処理学会論文誌, Vol.28, No.9, pp.962-974 (1987).
- 7) 水野慎士, 岡田 稔, 横井茂樹, 鳥脇純一郎: 曲面多面体の CSG モデリングに関する一考察, 信学技報, パターン認識と理解, PRU94-88, pp.23-30 (1994).
- 8) 水野慎士, 岡田 稔, 横井茂樹, 鳥脇純一郎: CSG を用いた仮想彫刻, 情処研報, グラフィクスと CAD, GCAD73-7, pp.49-56 (1995).
- 9) Mizuno, S., Okada, M., Yokoi, S., and Toriwaki, J.: A Virtual Sculpture System, *Proc. Int'l Conf. on Virtual Systems and MultiMedia VSM'95*, pp.308-313 (1995).
- 10) 野崎昭弘: 離散系の数学, 近代科学社 (1980).
- 11) 吉田典可: 論理数学 I, II, 共立出版 (1978).
- 12) 細井 勉: 代数系入門, 産業図書 (1982).
- 13) 久保寺玄一郎, 岡田 稔, 横井茂樹, 鳥脇純一郎: 半空間プリミティブによる対話的 CSG モデラ, 情処研報, グラフィクスと CAD, 92CG55-2 (1992).

付 録

A.1 定理 1 の証明

$$\begin{aligned}
 [\text{右辺}] &= (R^{SC})^B \\
 &= (R^B \cup R^C)^B = R^B = [\text{左辺}]
 \end{aligned}$$

□ (証明終)

A.2 以下の証明の準備

全空間  $\Omega$  は, 2つの閉集合  $R_1, R_2$  に基づいて, 図 9 の Euler 図に示すような, 互いに排反な 9 個の部分集合に分割される. すなわち,

$$\begin{aligned}
 R_{II} &= \{x|x \in R_1^I \wedge x \in R_2^I\} \\
 R_{IB} &= \{x|x \in R_1^I \wedge x \in R_2^B\} \\
 R_{IO} &= \{x|x \in R_1^I \wedge x \in R_2^O\} \\
 R_{BI} &= \{x|x \in R_1^B \wedge x \in R_2^I\} \\
 R_{BB} &= \{x|x \in R_1^B \wedge x \in R_2^B\} \\
 R_{BO} &= \{x|x \in R_1^B \wedge x \in R_2^O\} \\
 R_{OI} &= \{x|x \in R_1^O \wedge x \in R_2^I\} \\
 R_{OB} &= \{x|x \in R_1^O \wedge x \in R_2^B\} \\
 R_{OO} &= \{x|x \in R_1^O \wedge x \in R_2^O\}
 \end{aligned}$$

である. □

A.3 定理 3 の略証

- (1) 以下, 2項演算,  
 $(\text{not}(\text{or } R_1 R_2)) = (\text{and}(\text{not } R_1)(\text{not } R_2))$

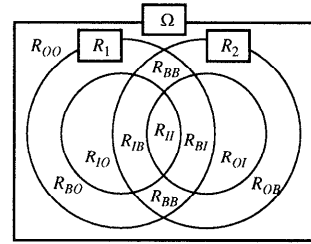


図 9 2変数の3値論理代数の Euler 図  
 Fig. 9 An Euler diagram concerning the three-value logic of two variables.

について証明する. 多項演算についても帰納的に示される.

$$\begin{aligned}
 [\text{左辺}] &= (\text{not}(\text{or } R_1 R_2)) \\
 &= \{x|x \in (R_1 \cup R_2)^{SC}\} \\
 &= \{x|x \in (R_1 \cup R_2)^C \cup (R_1 \cup R_2)^B\} \\
 &= \{x|x \in (R_1^C \cap R_2^C) \cup (R_1 \cup R_2)^B\} \\
 &= \{x|x \in (R_1^C \cap R_2^C) \cup (R_1^B \cap R_2^C) \\
 &\quad \cup (R_1^B \cap R_2^B) \cup (R_1^C \cap R_2^B)\} \\
 &= \{x|x \in (R_1^C \cup R_1^B) \cap (R_2^C \cup R_2^B)\} \\
 &= \{x|x \in R_1^{SC} \cap R_2^{SC}\} \\
 &= (\text{and}(\text{not } R_1)(\text{not } R_2)) = [\text{右辺}]
 \end{aligned}$$

(2) 以下, 2項演算,

$$\begin{aligned}
 (\text{not}(\text{and } R_1 R_2)) &= (\text{or}(\text{not } R_1)(\text{not } R_2))
 \end{aligned}$$

について (定理 3-1) を用いて証明する. 多項演算についても帰納的に示される.

$$\begin{aligned}
 [\text{左辺}] &= (\text{not}(\text{and } R_1 R_2)) \\
 &= (\text{not}(\text{and}(\text{not}(\text{not } R_1))(\text{not}(\text{not } R_2)))) \\
 &= (\text{not}(\text{not}(\text{or}(\text{not } R_1)(\text{not } R_2)))) \\
 &= (\text{or}(\text{not } R_1)(\text{not } R_2)) = [\text{右辺}]
 \end{aligned}$$

□ (略証終)

A.4 定理 4 の略証

定理 3, および,  $S = F[x; R]$  が準同型写像であることより明らか. □ (略証終)

A.5 定理 5 の略証

ここでは, 2項論理和について証明する. 多項論理和についても帰納的に示される.

(i)  $(\text{or } F[x; R_1]F[x; R_2]) = I$  のとき, 表 2, 図 9 より,

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{x} \in R_1^I) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^I) \vee (\mathbf{x} \in R_1^I) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^B) \\
 &\vee (\mathbf{x} \in R_1^I) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^O) \vee (\mathbf{x} \in R_1^B) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^I) \\
 &\vee (\mathbf{x} \in R_1^O) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^I) \\
 &= (\mathbf{x} \in R_{II}) \vee (\mathbf{x} \in R_{IB}) \vee (\mathbf{x} \in R_{IO}) \\
 &\vee (\mathbf{x} \in R_{BI}) \vee (\mathbf{x} \in R_{OI}) \\
 &= (\mathbf{x} \in (\text{or } R_1 R_2)^I) \\
 &= (F[x; (\text{or } R_1 R_2)] = I)
 \end{aligned}$$

(ii)  $(\text{or } F[x; R_1]F[x; R_2]) = B$  のとき, 表 2, 図 9

より,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} \in R_1^B) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^B) \vee (\mathbf{x} \in R_1^B) \\ & \quad \wedge (\mathbf{x} \in R_2^O) \vee (\mathbf{x} \in R_1^O) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^B) \\ & = (\mathbf{x} \in R_{BB}) \vee (\mathbf{x} \in R_{BO}) \vee (\mathbf{x} \in R_{OB}) \\ & = (\mathbf{x} \in (or R_1 R_2)^B) \\ & = (F[\mathbf{x}; (or R_1 R_2)] = B) \end{aligned}$$

(iii)  $(or F[\mathbf{x}; R_1] F[\mathbf{x}; R_2]) = O$  のとき, 表 2, 図 9 より,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} \in R_1^O) \wedge (\mathbf{x} \in R_2^O) \\ & = (\mathbf{x} \in R_{OO}) \\ & = (F[\mathbf{x}; (or R_1 R_2)] = O) \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より, 与定理は成り立つ.

□ (略証終)

#### A.6 定理 6 の略証

定理 3 による準補集合に関する双対性, および, 定理 4 による 3 値命題論理に関する双対性と定理 5 により明らか. □ (略証終)

#### A.7 定理 7 の略証

(i)  $(not F[\mathbf{x}; R]) = I$  のとき, 表 4 より,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} \in R^O) \\ & = (\mathbf{x} \in (not R)^I) = (F[\mathbf{x}; (not R)] = I) \end{aligned}$$

(ii)  $(not F[\mathbf{x}; R]) = B$  のとき, (i) と同様に,

$$(\mathbf{x} \in R^B) = (F[\mathbf{x}; (not R)] = B)$$

(iii)  $(not F[\mathbf{x}; R]) = O$  のとき, (i) と同様に,

$$(\mathbf{x} \in R^I) = (F[\mathbf{x}; (not R)] = O)$$

(i), (ii), (iii) より, 与定理は成り立つ. □ (略証終)

(平成 8 年 7 月 23 日受付)

(平成 9 年 6 月 3 日採録)



岡田 稔 (正会員)

昭和 59 年名古屋工業大学工学部電気工学科卒業, 平成元年名古屋大学大学院博士後期課程 (情報工学) 修了. 工学博士. 昭和 63・平成元年度日本学術振興会特別研究員, 平成 2 年名古屋大学情報処理教育センター・助手を経て, 平成 5 年同・助教授, 現在に至る. 平成 7 年より 1 年間, 米国ミシガン大学・客員准教授. 画像の認識と理解, 計算幾何学, 画像合成とそれらの医用臨床診断への応用, 大規模計算機システムおよび情報ネットワーク構成理論に関する研究に従事. 電子情報通信学会, IEEE 各会員. 平成 4 年度情報処理学会研究賞, 平成 6 年度市村賞学術貢献賞各受賞. 著書「C によるプログラミング演習」(近代科学社), 「OpenWindows によるワークステーション入門」(朝倉書店), 「情報科学基礎論」(共著: 朝倉書店) など.



金 環 塚

昭 58 年韓国漢陽大学理学部数学科卒業, 平成元年名古屋大学大学院博士前期課程 (情報工学) 修了. 現在韓国江原大学校電子計算学科講師. 在学中, コンピュータグラフィックスにおける幾何形状モデリングと光線追跡算法の基礎手法に関する研究に従事.



横井 茂樹 (正会員)

昭和 24 年生. 昭和 52 年名古屋大学大学院博士課程 (電気系専攻) 修了. 同年名古屋大学工学部情報工学科助手, 昭和 53 年三重大学工学部電子工学科助教授, 昭和 57 年名古屋大学工学部情報工学科助教授を経て, 平成 5 年同大学情報文化学部自然情報学科教授, 現在に至る. 工学博士. コンピュータグラフィックス, バーチャルリアリティ, マルチメディアなど, 映像を中心とした情報メディア技術とその社会的影響に関する研究に従事. 市村賞学術貢献賞, 日本 ME 学会論文賞各受賞. 電子情報通信学会, 日本 ME 学会各会員.



鳥脇純一郎 (正会員)

昭和 14 年生. 昭和 37 年名古屋大学工学部電子工学科卒業. 昭和 42 年同大学大学院博士課程修了. 同年 4 月同大学工学部助手. 以後, 昭和 45 年同助教授, 昭和 49 年同大学大型計算機センター助教授, 昭和 55 年豊橋技術科学大学情報工学系教授, 昭和 58 年名古屋大学工学部電子工学科教授を経て, 昭和 60 年 4 月より同大学工学部情報工学科教授. 工学博士. パターン認識, 画像処理, グラフィックス, および, それらの医学情報処理への応用に関する研究に従事. 著書「パターン認識の画像処理」(朝倉書店), 「認識工学」(コロナ社), 「見えないイメージを見る」(共立出版). 電子情報通信学会, 日本 ME 学会, 画像電子学会, 人工知能学会, コンピュータ支援画像診断学会, IEEE 各会員.