λ-幾何（λ=3m）のスタイナ木の作成法

3L－2

早　瀬　道　芳
岡山県立大学情報工学部

1　はじめに

スタイナ木は, x-y平面上に与えられた点の集合に必要に応じて新たな点（スタイナ点と呼ぶ）を追加して, 点間を枝で接続した木である. また, ユークリッド幾何と直交幾何の間を埋めるλ-幾何は、線分の方向を水平方向と$\pi/\lambda(\lambda \geqq 2)$の整数倍の方向のみに限定した幾何である（図1参照）. 本論文では, λ-幾何(以後, λ=3m, mは正整数とする)のスタイナ木の作成法を述べる. 3点に対する最小スタイナ木（以下SMTと略す）のスタイナ点の位置の厳密解は, 従来のユークリッド幾何の方法の拡張により得られることを示し, 4点のSMTの作成法も示す. そして, 一般のn点に対するスタイナ木の作成法に言及する.

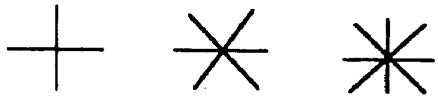

図1. λ-幾何の軸方向

2　問題と準備

λ-幾何のSMTとは, 枝をλ-距離（後述）で測った長さの和が最小となるスタイナ木である. 3点, 4点が与えられたときのλ-幾何のSMTを作成する問題を考える 。

λ-幾何は水平方向とπ/λの整数倍の方向の線分のみが許される. この許される方向を軸方向と呼ぶ. そして, 2点間のλ-距離d^λは次のように定義する[1]. ユークリッド距離は∞-距離d^∞である. 2点p_1,p_2間を軸方向の線分$l_1,l_2,\cdots,l_m$でつなぎ, 各線分l_iの長さをd_i^∞とする. 2点p_1,p_2間のλ-距離は$d^\lambda(p_1,p_2) = \min\{\Sigma_i d_i^\infty\}$とする. 2点$p_1,p_2$間のλ-距離は, 点$p_1,p_2$において角度$\pi/\lambda$で交差する軸方向線がつくる平行四辺形内の経路長に等しい. ただし、2点p_1,p_2が一つの軸方向線上にある場合は, 平行四辺形が直線になり, 2点間のユークリッド距離に等しくなる. この平行四辺形を点p_1,p_2がつくる平行四辺形と呼ぶ.

3点a, b, cが与えられたとき, 点を通る軸方向の線で分割してできる領域を定義する. 但し, 3点a, b, cに関する添字を1, 2, 3で表わし, 共通の場合iで表わす. 与えられた1点aを通る一つの軸方向の線を点aからの2つの半直線とみなし, 無限遠方向が水平方向と反時計方向角度ϕ_iをなす半直線を$La(\phi_i)$と表わす. $La(\phi_i)$と$La(\phi_i-\pi/\lambda)$ではさまれた領域（境界線を含める）を点aからの放射領域と呼び, $Qa(\phi_i)$と表わす. 2点a,bからの2つの放射領域の共通部分$Qa(\phi_1) \cap Qb(\phi_2)$を$Qab(\phi_1, \phi_2)$と表わす. 特に, 2点a,bに対して,

$\{ Qab(\phi_1, \phi_2) \mid |\phi_1 - \phi_2| = 2\pi/3 \}$

を, 点a,bに対するスタイナ点候補領域と呼ぶ（図3および図4のハッチング領域). 図2のように3点を通る軸方向線を引いたとき, 3点からの3つの放射領域の共通部分$Qa(\phi_1) \cap Q(\phi_2) \cap Q(\phi_3)$を$Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$と表わす.

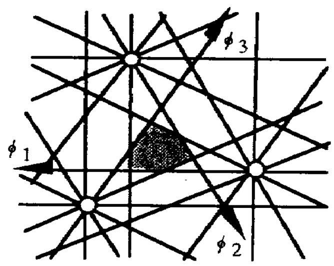

図2. 軸方向線による領域分割と
スタイナ点位置（λ=6)

3　3点の最小スタイナ木

3点a, b, cが与えられたときのλ-幾何のSMTのスタイナ点の位置について述べる. ユークリッド幾何の場合と同様に, 3点a,b,cに対して, 図3および図4に示すように, 線分abの∞-距離を一辺とする正三角形abxを直線abに対して点cの反対側に作り, Δabxの外接円をCとする. 円Cと線分xcの交点をsとする.

ユークリッド幾何では, 点sはSMTのスタイナ点であり, $d^\infty(s,x) = d^\infty(s,a)+d^\infty(s,b)$である[1]. これがλ-幾何でも成立することを述べる. 先ず,

[命題 1][4] λ=3mの場合, 3点a, b, cのSMTのスタイナ点位置の領域は,

$\{ Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mid |\phi_1 - \phi_2| = |\phi_2 - \phi_3| = |\phi_3 - \phi_1| = 2\pi/3\}$

である（図2のハッチング領域). ただし, この領域内に与えられた点を含む場合, SMTは最小全域木と等長である.

A Construction Algorithm of Steiner Trees in λ-Geometry when λ=3m
Michiyosi HAYASE
Faculty of Computer Science and System Engineering, Okayama Prefectural University, 111 Kuboki, Soja, Okayama, 719-1197 Japan

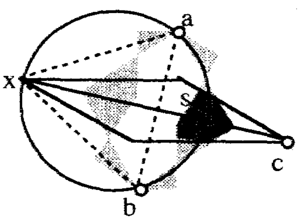

図３．３点木のスタイナ点位置（$\lambda=6$）

この領域内のどこにスタイナ点を置いても３点木の枝長和は等しい．この領域が存在しない場合，SMTは全域木と一致する．

［命題２］$\lambda=3m$の場合，点x,cがつくる平行四辺形と，直線abに対して点cの側にある点a,bに対するスタイナ点候補領域との共通部分（図３の濃いハッチング領域）は，命題１のSMTのスタイナ点位置の領域と一致する．（証明略）

点sは命題1の共通部分内にあるので，ユークリッド幾何のSMTのスタイナ点はλ-幾何のSMTのスタイナ点である．次に，

［命題３］$\lambda=3m$の場合，$d^{\lambda}(s,x)=d^{\lambda}(s,a)+d^{\lambda}(s,b)$である．

（証明）図４に示すように，２点a, bを通る軸方向線が角度$2\pi/3$で交わり点sに直近の点をdとする．直線da,dbは軸方向であり，$\angle adx=\angle abx=\angle bdx=\angle bax=\pi/3$だから，直線dxは軸方向である．従って，$\angle sad=\angle sbd=\angle sxd<\pi/\lambda$である．$\angle sad=e$とおくと，文献[3]の補題１を用いて，

$d^{\lambda}(s,a)+d^{\lambda}(s,b)$

$=d^{\infty}(s,a)\cos(\pi/2\lambda-e)/\cos(\pi/2\lambda)+d^{\infty}(s,b)\cos(\pi/2\lambda-e)/\cos(\pi/2\lambda)=\{d^{\infty}(s,a)+d^{\infty}(s,b)\}\cos(\pi/2\lambda-e)/\cos(\pi/2\lambda)$

$=d^{\infty}(s,x)\cos(\pi/2\lambda-e)/\cos(\pi/2\lambda)=d^{\lambda}(s,x).$

である．□

以上をまとめて，３点のλ-幾何のSMTの作成法を述べる．先ず，ユークリッド幾何と同様に２点a,bを点x（代替点と呼ぶ）に置き換える．次に，円弧abの代わりに点a,bに対するスタイナ点候補領域とし，直線xcの代わりに点x,cがつくる平行四辺形として，両者の共通部分内の任意の位置にスタイナ点を置いて，３点a, b, cと枝をつなぐ．共通部分がないときは最小全域木とする．

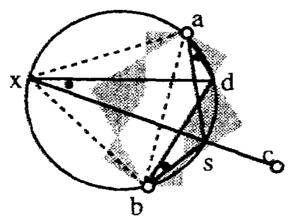

図４．$d^{\lambda}(s,x)=d^{\lambda}(s,a)+d^{\lambda}(s,b)$,（$\lambda=6$）

4　4点の最小スタイナ木

４点のλ-幾何のSMTの作成法を述べる．図５に示すように，４点a,b,c,dを２点ごとの点対に分けて，各点対の代替点x,yを求める．２つの代替点x,yがつくる平行四辺形を作り，この平行四辺形と各点対に対するスタイナ点候補領域との共通部分（濃いハッチング領域）を求める．共通部分が２つあれば各共通部分内にスタイナ点を置き，それぞれ点対と枝をつなぎ，スタイナ点間を枝でつなぐ．ただし，スタイナ点と代替点がつくる平行四辺形内に他のスタイナ点を含むように決める．共通部分が１つのときは共通部分内にスタイナ点を置き，点対と枝をつなぎ，スタイナ点と他の点対との３点は最小全域木とする．共通部分がないときは４点の最小全域木とする．点対の組み合わせを替えて同じ処理をし，枝長和が最小の木を採用する．

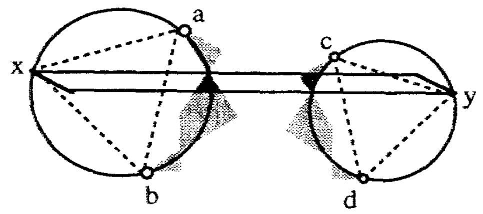

図５．4点木のスタイナ点位置（$\lambda=6$）

5　おわりに

与えられた３点と４点のλ-幾何($\lambda=3m$)のSMTの作成法を述べた．ユークリッド幾何の方法の２点間の円弧の代わりに２点に対するスタイナ点候補領域とし，代替点と与点(代替点)の間の直線の代わりに代替点と与点(代替点)がつくる平行四辺形とすることにより、スタイナ点の位置が求まることを示した．一般にn個の点が与えられたときのλ-幾何の（極小）スタイナ木は，よく知られたMelzak法[1]，または，Melzak法にスタイナ点候補領域と平行四辺形による拡張を追加して作成することができる．

参考文献

[1] F. K. Hwang, D. S. Richards and P. Winter, *The Steiner Tree Problem*, Elsevier Science Pub.,1992.

[2] D. T. Lee and C. F. Shen, "The Steiner Minimal Tree Problem in the λ-Geometry Plane," Proc. ISAAC'96, pp.247-255,1996.

[3] 早瀬道芳，目木信太郎，"λ-幾何のスタイナ木作成法，" 情報処理学会論文誌，vol.38, no,4, pp.677-686, 1997.

[4] 早瀬道芳，"λ-幾何における３点の最小スタイナ木について，" 数理解析研究所講究録 992, pp.74-81, 1997.