証明論的手法による一般部分計算の記述

3 E − 3

湯浅 能史

早稲田大学理工学総合研究センター

0 はじめに

一般部分計算（[1],[2],[3]）では従来の部分計算を更に押し進め、条件分岐の際の判定や関数の仕様などを定理証明系によって処理することで、枝刈りや畳み込みをより完全に行なうこと目指している。その際の情報を抽出するためにシーケント推論による関数の仕様記述を利用すると大変便利である。なぜなら関数のリダクションをシーケント推論のカット除去と対応させることによって、部分計算ののプロセスと同時に並行して仕様記述の抽出を行なうことができるからである。また一般部分計算の諸手法をこの枠組で統一的に記述することにより、関数評価系と定理証明系の連携をより厳密に分析しこれらの動作を理論的に保証できると思われる。

本稿では主に基本的な場合である再帰を含まない関数について述べるが、数学的帰納法に相当する推論図式を加えて体系を拡張すれば再帰定義された関数の部分計算の記述も可能である。これについては現時点ではまだ検討中であるが、最終節において若干の結果と今後の方針について触れる。

1 シーケント推論による純リスプ関数の記述

本稿で扱う体系は直観主義論理のシーケント推論 LJ を命題論理に制限したものである。連言をリスト構成子に選言を条件分岐に読み換えて用いる。シーケント推論 LJ の定義等については数理論理学の教科書（和書であれば例えば [4] など）を参照されたい。

ここで扱うシーケントとは以下の形式をいう。これは、項 $s_1, s_2, \cdot, s_n$ がそれぞれ型 $S_1, S_2, \cdot, S_n$ を持つという環境下で項 t が型 T を持つという意味である。

$$s_1 : S_1, s_2 : S_2, \cdots, s_n : S_n \to t : T$$

与えられた関数に対しその仕様を推論する推論図を対応付ける。純リスプの関数には以下のものが対応している。ここに A や B はリストにマッチする変数で X や Y はアトムにマッチする変数である。S や T はこれら二種類の変数のいずれかを表している。

リスト演算

$$\frac{car\,x : X \to car\,x : X}{x : [X|A] \to car\,x : X} \qquad \frac{cdr\,x : A \to cdr\,x : A}{x : [X|A] \to cdr\,x : A}$$

$$\frac{x : X \to x : X \quad y : A \to y : A}{x : X, y : A \ \to\ cons\,x\,y : [X|A]}$$

条件分岐

$$\frac{\dfrac{\dfrac{y : S \to y : S}{x : [X|A], y : S \to y : S}}{x : [X|A], y : S \to y : S \vee T} \quad \dfrac{\dfrac{z : T \to z : T}{x : [], z : T \to z : T}}{x : [], z : T \to z : S \vee T}}{x : B, y : S, z : T \ \to\ if\,x\,y\,z : S \vee T}$$

関数定義

$$\frac{x : S \to y : T}{\to \lambda x.y : S \supset T}$$

この他に等号関数や関数適用にも対応する推論図式があるが複雑であるため紙面の都合上省略する。

一般の関数に対応する推論図はこれらを組み合わせて得られるが、関数の合成は全て「三段論法（カット）」により行なうことにする。但しここでのカットは論理学におけるものとは若干異なり、カット論理式の単一化を前提としている。従って以下の例のように異なった型式についてのカットも許される。

$$\frac{x : S \to f(x) : U \quad y : V \to g(y) : T}{x : S \ \to\ g(f(x)) : T}$$

2 関数評価とカット除去

関数のリダクションに対応する概念は推論図のカット除去である。除去の際にカットされる型式の単一化を行なう点以外は、通常のカット除去と同じ手順で行なう。即ち、個々のカット推論をより高い位置にあるかもしくはより単純な型式についてのカットに帰着させる。（詳しい手順については前出 [4] を参照）例を挙げる。

カット除去前

$$\dfrac{\dfrac{x:X \to x:X \quad y:A \to y:A}{x:X, y:A \;\to\; cons\,x\,y:[X|A]} \quad \dfrac{cdr\,z:B \to cdr\,z:B}{z:[Y|B] \to cdr\,z:B}}{x:X, y:A \;\to\; cdr\,cons\,x\,y:B}$$

カット除去後

$$\dfrac{y:A \to y:A}{x:X, y:A \to y:A}$$

この例は極めて単純なケースであるが、一般にどのような複雑な推論図であってもそれが正しく定義された（実行時にエラーがでない）関数に対応するものである限り、決められた手順で変形を繰り返せば最後にはカットを含まない推論図を得ることができる。

定理 2.1 再帰を用いずに定義された関数には、その仕様を推論するカットを含まない推論図が存在する。

除去の過程において型式の単一化があまねく行なわれるため、カット除去後の推論図の最下段には元の関数の標準形とその仕様が選言の形で現れる。

またカット推論を含まない推論図内には最下段のシーケントにあるものより複雑な型式が現れない。これはどの部分関数も最終的な結果を求めるための必要最小限のデータしか出力しないことを意味しており、中間データ構造の除去（deforestation）が完全な形で実現されたことの証明にもなっている。

3　再帰関数の畳み込み

再帰を含む関数に適切な推論図を与える方法は現在検討中である。ここではもっとも単純なケースについて、畳み込みによる再帰の発生に対応する推論図の変形を紹介する。

$$f(x) = \begin{cases} y & (x \text{ is } nil) \\ g(f(cdr x)) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

右辺に現れる f を左辺の f に畳み込んで再帰を発生させる場合、対応する推論図の変形は次のようになる。

畳み込み前

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{cdr\,x:A \to f\cdot cdr\,x:U}{\mathcal{P}_1}}{cdr\,x:A \to g\cdot f\cdot cdr\,x:T}}{x:[X|A] \to g\cdot f\cdot cdr\,x:T} \quad \dfrac{\mathcal{P}_0}{x:[\,] \to y:S}}{x:[X|A] \vee [\,] \;\to\; if\,x\,(g\cdot f\cdot cdr\,x)\,y:T \vee S}$$

畳み込み後

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{P}_0}{x:[\,] \to y:S}}{\to \lambda x.y:[\,] \supset S} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{f:A \supset U \to f:A \supset U}{\mathcal{P}_1'}}{f:A \supset U \to g\cdot f\cdot cdr:[X|A] \supset T}}{f:[\,] \supset S \to f:B \supset (T/U)^{*}S}}{\to\; f:B \supset (T/U)^{*}S}$$

このように再帰的な関数の定義は数学的帰納法の推論法則に模して表現するのが適当であると思われる。

一般の再帰方程式が与えられた時でも、推論図の [] と cdr を書き換えれば形式的な推論図式を得ることができる。しかしこのようにすると与えられた定義域における f の停止性を保証できない。何らかの方法で停止性を保証しその証明を付加することがその後の部分計算の実行にも有効であろうと考える。

参考文献

[1] Y. Futamura and K. Nogi, Generalized partial computation, in: D.Bjørner, A.P.Ershov and N.D.Jones, eds., *Partial Evaluation and Mixed Computation* (North-Holland, 1988) 133-151

[2] Y. Futamura, Program evaluation and generalized partial computation, in: *Proceedings of International Conference on 5th Generation Computer Systems*, Tokyo (1988) 658-692

[3] Y. Futamura, K. Nogi and A. Takano, Essence of generalized partial computation., *Theoretical Compututer Science* **90** (1991) 61-79

[4] 竹内 外史・八杉 満利子, 「証明論入門」(共立出版株式会社, 1988)