1Ｌ−1

至る所不連続な関数達の非ルベーグ積分公式を使った ゆらぎのある微分方程式の解法

大脇信一

熊本大学理学部数理科学科

http://www.math.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ohwaki/index-j.html

1．はじめに

至る所不連続な関数達は、無理数で値０を取ると定義すると、ルベーグ積分論では至る所０となり、積分値は０になります。ところが、リーマン和の様子を数値実験で調べてみると、分割数を大きくすると中心極限定理に従って、０でない値の周りにシャープに分布しています。この値を確率リーマン積分と定義すると、いろいろな積分公式が得られます。この非ルベーグ積分を使うと、ゆらぎのある微分方程式を乱数を使わずに解けます。

2．一様撒布関数

変数 x の小数部分を２進法で書いて、その下半分の桁を 0.の後に付けた数を $U(x)$と置くと、この一様撒布関数 $U(x)$のグラフは０と１の間に一様に分布します [1] 。

この関数のリーマン和 $\sum_k U(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ を、[0,1]を 10,000 等分し、分点 x_k を乱数で動かして計算し、10 万サンプル計算し、その度数を計算して分布を描くと、つぎの図のように平均 0.5 の正規分布に近い分布になります。

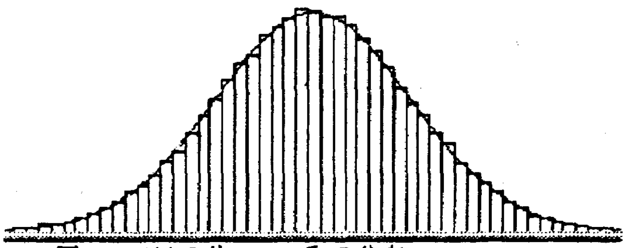

図１．$U(x)$のリーマン和の分布 (0.49≦x≦0.51)

Methods to solve differential equations with fluctuations using non-Lebesgue integral formulae for everywhere discontinuous functions

Shin-ichi Ohwaki
Faculty of Science, Kumamoto University
Kurokami 2-40-1, Kumamoto 860, Japan

さらに、分割数を 10 から 10,000 まで動かし、各分割数 n でのリーマン和の分布の平均と標準偏差 σ をグラフにすると、つぎのようになります。

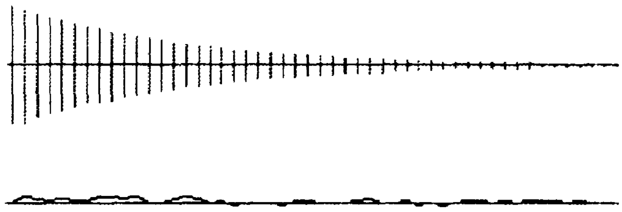

図２．$U(x)$のリーマン和の分布の平均と標準偏差
(水平線は、y=0.5 と y=0.288≒$1/\sqrt{12}$ 、横軸は対数軸)

上の縦線は、平均を中心にし上下に標準偏差 σ の分伸ばしています。下の折れ線は、$\sigma\sqrt{n}$ のグラフを描いています。この値が一定になるというのが中心極限定理で、これらの実験から、

$$\int_a^b U(x)dx = \frac{b-a}{2}$$

となるように、リーマン積分を拡張した確率リーマン積分を定義できることが実験的にわかります。

3．正規撒布関数

標準正規撒布関数 $N(x)$を、

$$N(x) = \sqrt{-2\log U(x)}\ \sin 2\pi U(U(x))$$

で定義すると、グラフはつぎのようになります。

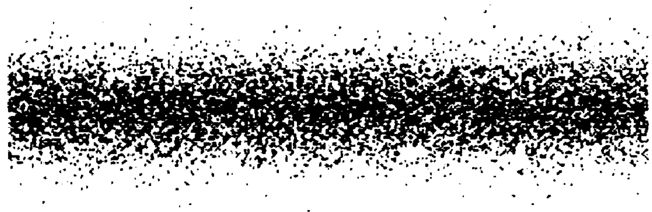

図３．$N(x)$のグラフ (0≦x≦1, −5≦y≦5, 1 万分点)

この関数値の密度分布を描くと、標準正規分布に従っています。任意の区間[a, b]で、

$$\int_a^b N(x)dx = 0$$

となることも実験的に確かめられます。

4．指数撒布関数

パラメータθの指数撒布関数を

$$E_\theta(x) = -\frac{1}{\theta}\log U(x)$$

で定義すると、その密度分布はつぎの図のようになります。

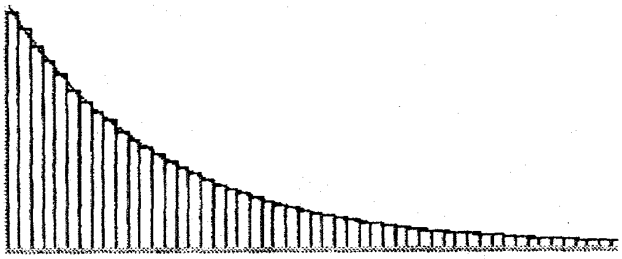

図4．指数撒布関数 $E_1(x)$ の密度分布
($0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 1$)

曲線は、つぎの密度関数のグラフです。

$$f(x) = \theta \cdot e^{-\theta \cdot x}$$

この指数撒布関数については、つぎの公式が実験的に確認されています。

$$\int_a^b E_\theta(x)dx = \frac{b-a}{\theta}$$

その他にもいろいろな不連続関数が定義でき、それらについての積分公式が見つかります。[2]

4．初期値問題

一番簡単な例として、t を時間、$x(t)$を位置として、一様撒布関数 $U(t)$を右辺に入れたつぎの初期値問題を考えましょう。

$$\frac{dx}{dt}(t) = U(t),\ x(0) = 0$$

差分化して、オイラー法などで解いてみると、分割を細かくすると、離散解は $x = 0.5 \cdot t$ に近づいていきます[1]。

この解は、方程式を０から t まで形式的に積分して、

$$x(t) = \int_0^t U(s)ds = 0.5 \cdot t$$

と計算で導くことができます。ただし、微分方程式の意味付けは、数学的に問題が残ります。

5．境界値問題

つぎに一番簡単な境界値問題の例として、x を金属棒の座標、$u(x)$ を x での温度、そこに加える熱を一様撒布関数 $U(x)$とし、棒[0,1]の両端の温度を０にした問題は、つぎのようになります。

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -U(x),\ u(0) = u(1) = 0$$

これを差分化して連立１次方程式を解いて求めた解は、分割を細かくすると、$y=0.25x(1-x)$に近づいていきます[1]。

方程式を x について０から x まで積分すると、

$$\frac{du}{dx} = -\int_0^x U(s)ds + C = -0.5x + C,\ C\text{は定数}$$

となります。これを積分し $u(0)=0$ を使うと、

$$u(x) = -0.25x^2 + Cx$$

となります。$u(1)=0$ より $C=0.25$ となります。

このような計算で、$u(x) = -0.25x^2 + 0.25x$ という数値実験と一致する解が計算で得られます。

6．おわりに

以上のように、至る所不連続な関数の確率リーマン積分を使うことにより、確率過程を微分方程式に入れて扱う従来の確率微分方程式の扱い方より、はるかに簡単にゆらぎのある問題を扱うことができます。

ただ、数学的には無限の精度で議論できますが、計算機では数値が６４ビットなどに制限された有限の精度で扱われるので、その影響が至る所で現れ、利用技術や限界を知ることが大切です。[2]

参考文献

[1]大脇信一：至る所不連続な関数達と微分方程式、日本応用数理学会 1997 年度年会講演予稿集、(1997)、p.346-347.

[2]大脇信一：至る所不連続な関数達の確率リーマン積分、準備中.