ラグランジュ緩和による，委託手数料を考慮したポートフォリオ・リバランス問題の解法

井深 浩† 葛山 康典†† 大野 高裕†††

金融資産の組合せであるポートフォリオを満期までの期間中に，構成資産の一部を売買し改訂することをリバランスという．リバランスでは資産の売買にともない委託手数料が必要となるが，区分線形な凹関数である委託手数料を取り扱うためには整数変数の導入が必要となる．そのため委託手数料を考慮したリバランス問題は（混合）整数計画問題として定式化され，問題の規模が大きくなるにつれ解の導出が困難となる．これに対し本研究ではリバランス問題の持つ構造から，ラグランジュ緩和を用いて問題を独立な2つの子問題に分割し，大規模な問題に対しても比較的容易に解を導出できる解法を提案し，数値実験から解法の有効性を示す．

A Lagrangean Relaxation for Portfolio Rebalance Optimizing under Commission Fee

Hiroshi Ibuka,† Yasunori Katsurayama†† and Takahiro Ohno†††

The portfolio is the combinational holding of financial assets, and the review of the portfolio by buying and saling the part of the assets of the portfolio in the investment horizon is called portfolio rebalance. At the time of rebalance, the commission fee, which has piecewise-linear convex property, is imposed for contract. For the formulation of the commission fee, integer variables are needed. Then rebalance problem is formulated as (mixed) integer programing problem. The problem is hard to solve when it manages more than thouthands of securities. In this paper, we present a rebalance method under commission fee. The method is based on the special structure of rebalance problem which allows the Lagrangean relaxation problem to be decomposed into two easy disjoint problems. The effectiveness of relaxation is shown in numerical experiences.

1. まえがき

1.1 背景と目的

複数の金融資産の組合せをポートフォリオという．投資家は構築されたポートフォリオに関して，構成資産の売買をともなう改訂を定期的に行うが，この改訂をリバランス（rebalance）という．

株式投資におけるリバランスでは，株式の売買にともない株式売買委託手数料（以下，委託手数料）が必要となるが，委託手数料は区分線形な凹関数と定められている．凹な費用関数を取り扱うためには整数変数を導入する必要があり，その結果委託手数料を考慮したリバランス問題は（混合）整数計画問題として定式化される．そのため問題の規模が大きくなるにつれ解の導出は困難になる．現在の委託手数料体系下では，東京証券取引所に上場する1,200銘柄，実際の委託手数料区分10クラスの規模のリバランス問題は，12,000個の整数変数を扱う必要がある．

そこで実務では委託手数料を考慮せずリバランスし，その後に委託手数料を控除するリバランスが行われている．しかしこのようなリバランスは近似的であり，機会損失が発生している危険性がある．また，現在議論されている金融ビッグバンによって，1999年末に委託手数料が完全自由化された後においても，この種の問題を避けることは困難であると考えられる．

委託手数料を考慮したリバランスモデル[1)]は，リバランス後のポートフォリオの期待価値を最大化する（混合）整数計画問題として定式化されるが，本研究ではその問題の構造からモデルをラグランジュ緩和し，独立な2つの子問題に分割する．これにより大規模な

† 三菱化学研究開発本部横浜総合研究所
Yokohama Reserch Center, Research and Development Division, Mitsubishi Chemical Corporation
†† 早稲田大学社会科学部
School of Social Sciences, Waseda University
††† 早稲田大学理工学部
School of Science and Engineering, Waseda University

問題に対しても，比較的容易に解を導出できる解法を示し，数値実験を行う．

1.2 ポートフォリオ選択モデル

ポートフォリオ選択の方法論にはMarkowitz[2)]による平均·分散（MV）モデルやKonnoら[3)]による平均·絶対偏差モデルがある．

1.2.1 平均・分散（MV）モデル

Markowitz[2)]によるMVモデルは投資行動を証券の期待収益率の平均と分散の2パラメータで評価するもので，投資家の効用関数が収益に関し2次であるとき，投資家の行動は以下の2次計画問題に帰着される．

$$\min\ \sigma = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{N} r_j x_j \geq \mu$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,N$$

ただし，N：証券数，x_j：証券 j への投資比率

μ：投資家が要求する収益率

σ_{ij}：証券 i と j の共分散，r_j：j 証券期待収益率

上の問題は標準問題とよばれ，要求される収益率 μ を固定したもとで分散 σ^2 を最小とするポートフォリオを求めている．

1.2.2 平均・絶対偏差（MAD）モデル

2次計画問題として定式化されたMVモデルに対しKonnoら[3)]は，証券の収益率分布の多次元正規性を仮定するとき，MVモデルが線形計画問題である以下のMADモデルと等価であることを示した．

$$\min\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \tag{2}$$

$$\text{s.t.}\ z_t - \sum_{j=1}^{N}(r_j^t - r_j)x_j \geq 0,\ t=1,\ldots,T$$

$$z_t + \sum_{j=1}^{N}(r_j^t - r_j)x_j \geq 0,\ t=1,\ldots,T$$

$$\sum_{j=1}^{N} r_j x_j = \mu$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,N$$

表1 委託手数料

Table 1 Commission fee.

約定代金		委託手数料	
		変動費率	固定費部分
100万円以下		1.150 %	
100万円超	500万円以下	0.900 % +	2,500円
500万円超	1,000万円以下	0.700 % +	12,500円
1,000万円超	3,000万円以下	0.575 % +	25,000円
3,000万円超	5,000万円以下	0.375 % +	85,000円
5,000万円超	1億円以下	0.225 % +	160,000円
1億円超	3億円以下	0.200 % +	185,000円
3億円超	5億円以下	0.125 % +	410,000円
5億円超	10億円以下	0.100 % +	535,000円
10億円超		0.075 % +	785,000円

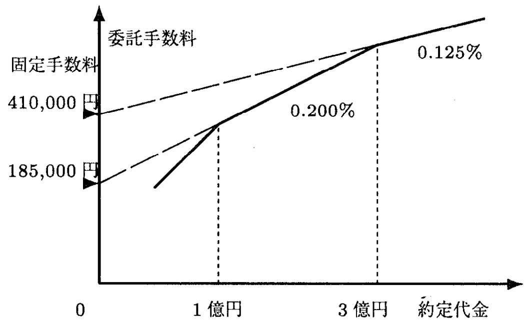


図1 委託手数料（例：1億円〜3億円のクラス）

Fig. 1 Commission fee (ex. 100〜300 million Yen).

ただし，T：期間，r_j^t：t 時点の j 証券収益率

r_j：j 証券期待収益率 $(r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_j^t)$

1.3 実際の委託手数料

東京証券取引所において委託手数料は，約定代金のクラスごとに定められた変動手数料率を約定代金に乗じたものに，固定費部分を加えて算定され（**表1**），委託手数料は約定代金に対して区分線形な凹（逓減）関数となる（**図1**）．

2. 従来の研究

2.1 委託手数料の定式化

委託手数料は証券の売却と購入の両方に対してかかり，j 証券 k クラスの証券売買絶対額 $|x_j^k|$（購入額を正数，売却額を負数としている）と，それに対応する0-1整数変数 δ_j^k を用いれば，区分線形な委託手数料は以下のようにモデル化される（**図2**）．

$$j\ \text{証券委託手数料} = \sum_{k=1}^{K}\left(v^k|x_j^k| + f^k\delta_j^k\right) \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\delta_j^k = 1,\ \delta_j^k \in \{0,1\}$$

$$\forall k,\ g^{k-1}\delta_j^k \leq |x_j^k| \leq g^k\delta_j^k$$

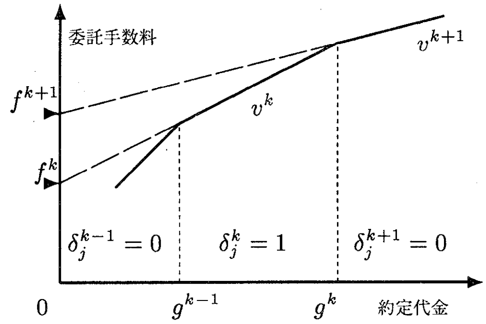


図 2 委託手数料のモデル
Fig. 2 Model of commission fee.

ただし，v^k：変動手数料率，f^k：固定手数料，
g^k：クラス境界

2.2 リバランスモデル

委託手数料を考慮したリバランスモデルは絶対値 $|x_j^k|$ を含み定式化される[1)]．しかし，ここで新たな実数変数 w_j^k を導入し，$w_j^k \geq x_j^k$，$w_j^k \geq -x_j^k$ の不等式のもとで目的関数を最大化したとき，その最適解 w_j^k は $\max\{x_j^k, -x_j^k\} = |x_j^k|$ と等しく，したがって絶対値変数を含んだリバランスモデルは以下の問題 PR と等価となる．なお一般の MAD モデルとは異なり，リスクを一定としたもとで収益の最大化を行うかたちで定式化している．

ここで目的関数，式 (4) は，リバランス後のポートフォリオ価値の最大化である．また制約，式 (5) は自己充足性制約を表し，式 (7) は MAD リスク[3)]制約を表す．さらに制約，式 (8) は区分線形な凹関数である委託手数料を表している．式 (6) は空売り禁止制約である．

リバランスモデル（**PR**）

$$\max.\ \sum_{j=1}^{N} r_j \left\{ h_j + \sum_{k=1}^{K} x_j^k \right\} - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(v^k w_j^k + f^k \delta_j^k) \qquad (4)$$

$$\text{s.t.}\ -\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} x_j^k - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(v^k w_j^k + f^k \delta_j^k) = 0 \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_j^k + r_j h_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, N \qquad (6)$$

$$x_j^k \in S_M \qquad (7)$$

$$x_j^k, w_j^k, \delta_j^k \in S_{PL} \qquad (8)$$

$$\delta_j^k \in \{0, 1\} \qquad (9)$$

ただし，

$$S_M = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \leq L \\ z_t + \sum_{j=1}^{N} e_j^t \left\{ h_j + \sum_{k=1}^{K} x_j^k \right\} \\ \qquad \geq 0,\ t = 1, \ldots, T \\ z_t - \sum_{j=1}^{N} e_j^t \left\{ h_j + \sum_{k=1}^{K} x_j^k \right\} \\ \qquad \geq 0,\ t = 1, \ldots, T \\ z_t \geq 0,\ t = 1, \ldots, T \end{array} \right\}$$

$$S_{PL} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{K} \delta_j^k = 1,\ j = 1, \ldots, N \\ w_j^k \leq g^k \delta_j^k, \\ \qquad k = 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, N \\ w_j^k - x_j^k \geq 0, \\ \qquad k = 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, N \\ w_j^k + x_j^k \geq 0, \\ \qquad k = 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$

N：証券数，K：クラス数，L：L_1 リスク
h_j：j 証券初期投資額，e_j^t：$(= r_j^t - r_j)$

3. ラグランジュ緩和による提案解法

問題 PR の制約式において，式 (7) は実数変数のみによる制約であり，式 (6) および式 (8) は証券ごとに独立な制約となっている．さらに式 (8) はクラスごとに独立でもある．本研究では制約式の持つ構造からラグランジュ緩和を用い，問題を解の導出が容易であり独立な子問題へと分割する解法を提案する．

3.1 自己充足性条件の変形

（混合）整数計画問題として定式化された問題 PR の解の導出を困難にしている制約は，自己充足性制約，式 (5) である．そこで手数料を含めた証券ごとの売買高として新たな変数 y_j を導入することにより，自己充足性制約を証券ごとに独立な式 (10a)～(10c) に分割する．

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = 0 \qquad (10a)$$

$$y_j = \sum_{k=1}^{K} x_j^k + \sum_{k=1}^{K} c_j^k,\ j = 1, \ldots, N \qquad (10b)$$

$$c_j^k = v^k w_j^k + f^k \delta_j^k, \quad k = 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, N \qquad (10c)$$

式 (10a)～(10c) を用いて問題 PR を以下のように修正する．

修正問題 PR（RPR）

$$\max.\ \sum_{j=1}^{N} r_j(h_j+y_j)-\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(1+r_j)c_j^k \quad (11)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{N} y_j = 0 \quad (12a)$$

$$y_j=\sum_{k=1}^{K}x_j^k+\sum_{k=1}^{K}c_j^k,\ j=1,\ldots,N \quad (12b)$$

$$c_j^k = v^k w_j^k + f^k\delta_j^k,\quad k=1,\ldots,K,\ j=1,\ldots,N \quad (12c)$$

$$y_j-\sum_{k=1}^{K}c_j^k+r_jh_j\geq 0,\ j=1,\ldots,N \quad (13)$$

$$y_j^k\in S_M^{'},\ x_j^k,w_j^k,\delta_j^k\in S_{PL},\ \delta_j^k\in\{0,1\}$$

ただし，

$$S_M^{'}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}z_t\leq L\\ z_t+\sum_{j=1}^{N}e_j^t\left\{h_j+y_j-\sum_{k=1}^{K}c_j^k\right\}\\ \qquad\geq 0,\ t=1,\ldots,T\\ z_t-\sum_{j=1}^{N}e_j^t\left\{h_j+y_j-\sum_{k=1}^{K}c_j^k\right\}\\ \qquad\geq 0,\ t=1,\ldots,T\\ z_t\geq 0,\quad t=1,\ldots,T\end{array}\right\}$$

3.2 ラグランジュ緩和

変形されたRPRにおいて制約，式(12b)と式(12c)は，各証券ごとに0-1整数変数 δ_j^k と実数変数とを結び付け，解の導出を困難にしている．そこで式(12b)と式(12c)をラグランジュ緩和する．その結果，問題は以下の2つの独立な子問題 $\mathrm{PR_M}$ と $\mathrm{PR_A}$ に分割される．なお η_j は式(12b)に，μ_j^k は式(12c)に対するラグランジュ乗数である．

子問題 $\mathrm{PR_M}$

$$\max.\ \sum_{j=1}^{N}(r_j+\eta_j)y_j - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(1+r_j+\eta_j-\mu_j^k)c_j^k \quad (14)$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{N}y_j=0$$

$$y_j-\sum_{k=1}^{K}c_j^k+r_jh_j\geq 0,\ j=1,\ldots,N$$

$$y_j^k\in S_M^{'}$$

子問題 $\mathrm{PR_M}$ は線形計画問題であり，解の導出は容易である．

子問題 $\mathrm{PR_A}$

$$\max.\ -\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\eta_j x_j^k - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\mu_j^k(v^k w_j^k+f^k\delta_j^k) \quad (15)$$

$$\text{s.t.}\ x_j^k,w_j^k,\delta_j^k\in S_{PL},\quad \delta_j^k\in\{0,1\}$$

子問題 $\mathrm{PR_A}$ は証券ごとに独立な制約を持つため，証券 j ごとに独立な子問題へとさらに分割することができる．再分割された子問題は，各証券における0-1整数変数 δ_j^k のクラスへの最大割当問題となり，容易に解の導出ができる．

以上からリバランス問題は独立な2つの子問題へと分割されたが，この子問題を用い η_j,μ_j^k による最小化問題として以下に定義するラグランジュ双対問題を解く．双対問題の解の値は，リバランス問題に対する上界値を与える．

Lagrangean Dual

$$LD=\min_{\eta_j,\mu_j^k}\left\{\mathrm{PR_M}(\eta_j,\mu_j^k)+\mathrm{PR_A}(\eta_j,\mu_j^k)\right\} \quad (16)$$

3.3 実行可能解の導出

分割された子問題 $\mathrm{PR_M}$ と子問題 $\mathrm{PR_A}$ から得られた解について，それぞれの解に選ばれた証券およびクラスが一致せず問題PRの実行可能解とならないことがある．本研究では解法の実行途中にも実行可能解を保持するため，子問題 $\mathrm{PR_M}$ に対する解から実行可能なクラスの0-1整数変数 δ_j^k を導き，解の候補とするヒューリスティック解法を提案する．

すなわち，子問題 $\mathrm{PR_M}$ は，自己充足性，空売り禁止，MADを制約としており委託手数料制約は，ラグランジュ乗数 η_j^k,μ_j^k を通して目的関数の係数に反映される．ラグランジュ乗数は $\mathrm{PR_M}$ の目的関数の係数を改訂とともに変化させ，これにより $\mathrm{PR_M}$ の解の値は委託手数料を考慮したリバランス問題PRの最適解へと近付く．

このことから，子問題 $\mathrm{PR_M}$ と子問題 $\mathrm{RM_A}$ のそれぞれの解に選ばれた証券およびクラスが一致しないときは，子問題 $\mathrm{PR_M}$ より得られた $y_j-\sum_{k=1}^{K}c_j^k$ の証券・クラスをもとに，0-1整数変数 δ_j^k の証券・クラスを一致させる．

Reassignment Heuristic

begin

$\mathrm{PR_M}$ と $\mathrm{PR_A}$ を解く;

if $\mathrm{PR_M}$ の解のクラスと $\mathrm{PR_A}$ の解のクラスが一致;
 then 実行可能解;
else 以下により，0-1 整数変数のクラスを $\mathrm{PR_M}$ の解のクラスに一致させる;

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{if } g^{k-1} \le y_j - \sum_{k=1}^{K} c_j^k \le g^k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

 if 解が PR の実行可能領域にある;
  then 実行可能解;
 else 解なし;
 end;
end.

なお実行可能解による解の値は，リバランスモデルに対する下界値を与える.

3.4 ラグランジュ乗数の改訂法

ラグランジュ乗数の改訂には劣勾配法を用いた.

Subgradient procedure

begin
 $LD^* :=$ 現時点で得られている実行可能解の値;
 β:=$0 < \beta \le 2$ の範囲の適当な値;
 ラグランジュ乗数 μ_j, η_j^k を適当に定める;
 while 定められたイテレーション回数 **do**
 begin
  $LD \leftarrow \max \mathrm{PR_M} + \max \mathrm{PR_A}$;
  if $LD \le LD^*$, **then** 終了
   LD^* が最良実行可能解（一定イテレーション回数の中で得られた実行可能解の中で最良のもの);
  else
   (a) ヒューリスティック解法の実行;
   実行可能解が得られれば，LD^* の値を更新;
   (b) ラグランジュ乗数の改訂;

$$\eta_j = \eta_j - \alpha \left\{ y_j - \sum_{k=1}^{K} x_j^k \right\} \tag{17a}$$

$$\mu_j^k = \mu_j^k - \alpha \left\{ c_j^k - (v^k w_j^k + f^k \delta_j^k) \right\} \tag{17b}$$

ただし，
$$\alpha = \frac{\beta(LD - LD^*)}{\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \{sv[j]^2 + sv[j][k]^2\}} \tag{18a}$$

$$sv[j] = y_j - \sum_{k=1}^{K} x_j^k \tag{18b}$$

$$sv[j][k] = c_j^k - (v^k w_j^k + f^k \delta_j^k) \tag{18c}$$

  end;
end.

ただし本研究では式 (18a) 中のステップ・サイズ β を，ラグランジュ乗数の改訂を一定の回数行うごとに減少する数列とした．すなわち一定の回数改訂を行うごとにステップ・サイズ β に定数（1 以下の正数）を乗じたものを，新たなステップ・サイズとした．なお減少数列の設定による解の精度は数値実験で示した.

4. 数値実験

4.1 比較・評価法

本研究の方法で得られた解を，手数料を無視したリバランスモデルから得られたポートフォリオの期待価値と比較し評価した．提案した解法から得られた実行可能解の精度は，ラグランジュ双対問題による上界値との差により定義される%Gap によって評価した.

$$\%\mathrm{Gap} = \frac{\mathrm{L.D.} - \mathrm{B.F.}}{\mathrm{B.F.}} \tag{19}$$

ただし，L.D.：ラグランジュ双対問題の解の値
B.F.：ヒューリスティック解法による解の値

4.2 設　　定

数値実験では東証 1 部上場企業よりランダムに選択した銘柄を用い，直近 48 カ月分の月次収益率データをもとに予算 10 億円で 89 年 1 月にイニシャルポートフォリオを構築する．それを 1 年後の 90 年 1 月に，直近 48 カ月分データによりリバランスした（**図 3**).

なお手数料を無視する場合の実際の手数料の算出に関しては，あらかじめ一定金額を見積もり実際の手数料費用を充てることとした．見積額は売却額と購入額の差から算出する．さらに見積額から実際の手数料を控除し残金が生じた場合，また手数料を考慮する場合でも，売却証券額から購入証券額と手数料を控除して残金が生じたときは，現金として保有し運用することはないものとする.

4.3 検討・考察

(i) **表 2** から手数料を考慮したリバランスモデルは，実行可能解によって，手数料を無視したリバランスを行う場合よりも，高い価値を持つポートフォリオにリバランスすることができた．また解の精度の評価基準である%Gap に関して，0.8〜0.9%程度となり有効な解が導出できたといえる.

(ii) 実際に要した手数料費用を，手数料を無視した

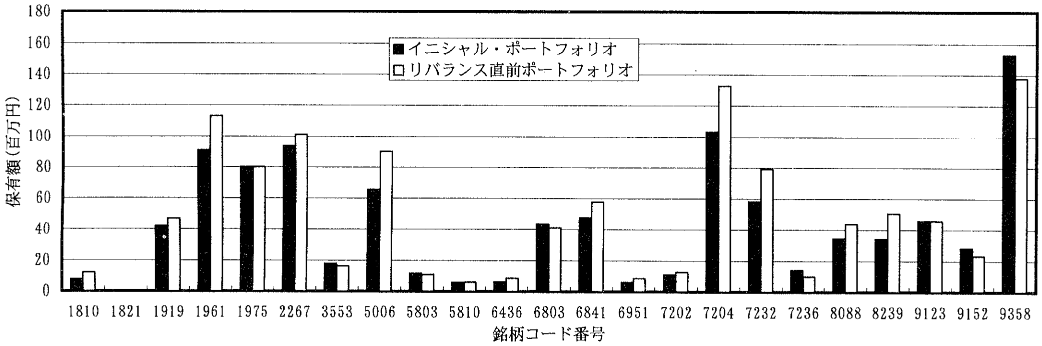


図 3 イニシャル・ポートフォリオ（'89/1）とリバランス直前のポートフォリオ（'90/1）（800 証券）
Fig. 3 Initial portfolio ('89/1) and portfolio before rebalance ('90/1)(800 stocks).

表 2 数値実験結果（単位：百万円）
Table 2 Computational result.

	statistic	instance 1	instance 2	instance 3
イニシャルポートフォリオ	証券数	300	500	800
構築条件	構築時期 ◇ L_1 リスク設定値	'89/1 ◇ 20.0	'89/1 ◇ 15.0	'89/1 ◇ 15.0
リバランス実施条件	実施時期 ◇ L_1 リスク設定値	'90/1 ◇ 50.0	'90/1 ◇ 50.0	'90/1 ◇ 50.0
	実施直前のポートフォリオ価値	1,139.7	1,191.3	1,153.3
手数料を考慮した	CPU time† (Sec.)	499.1	923.0	1,507.7
リバランスモデル	手数料額 ◇ 手元残金額	7.2 ◇ 0.2	8.4 ◇ 5.4	9.1 ◇ 12.7
	双対問題の解の値（L.D.）	1,190.4	1,249.1	1,213.7
	最良実行可能解値（B.F.）	1,180.7	1,238.7	1,203.3
	%Gap (=(L.D.−B.F.)/B.F. × 100)	0.8%	0.8%	0.9%
手数料を無視した	CPU time (Sec.)	1.2	1.9	3.1
リバランスモデル	見積手数料額 ◇ 手数料実際額	20.0 ◇ 15.4	20.0 ◇ 18.0	20.0 ◇ 18.7
	手元残金	4.6	2.0	1.3
	ポートフォリオ価値	1,172.9	1,229.0	1,193.6

† 手数料考慮下の CPU time はデータ入力，子問題の設定，劣勾配法およびヒューリスティック解法を 100 回繰り返すのに要した時間．
子問題 PR_M を解くにあたっては，Ftp.uu.net-Michel Bearlcelaar-LP.SOLVE を使用した．
計算機には Sun Sparc Station 20 を用いている．

表 3 ステップ・サイズの設定を変えたリバランス結果（800 証券）（単位：百万円）
Table 3 Computational results with changing step-size (800 stocks).

ステップサイズの設定		一定	5 回ごとに 0.9 倍‡	5 回ごとに 0.8 倍
50 イテレーション	最良実行可解を得た回数	45 回	48 回	42 回
までの	双対問題の解の値	1233.1	1228.8	1219.7
	最良実行可能解の値	1201.7	1202.3	1202.6
	%Gap	2.6%	2.2%	1.4%
	委託手数料額	9.1	9.1	8.6
	手元残金額	29.1	44.9	15.1
100 イテレーション	最良実行可能解を得た回数	81 回	84 回	42 回
までの	双対問題の解の値	1217.5	1213.7	1216.5
	最良実行可能解の値	1202.7	1203.3	1202.5
	%Gap	1.2%	0.9%	1.2%
	委託手数料額	9.0	9.2	8.6
	手元残金額	18.5	12.7	15.1

（‡instance 3 に対応）

場合に比べ低減することができた．これにより委託手数料の問題から生ずる機会損失の低減をはかることができた．

(iii) **表 3**，**図 4**，**図 5** より，ステップ・サイズの設定が解に大きく影響しており，したがってステップ・サイズの数列の設定が重要となることが分かる．**図 6** にステップ・サイズの設定別の解の収束のようすを示したが，ステップ・サイズを大きく変化させる（変化させるイテレーション回数を小さくする・ステップ・サイズを小さな値とする）ほど，収束は早いが解の精度が悪くなる傾向がある．したがって市場が大きく動き，

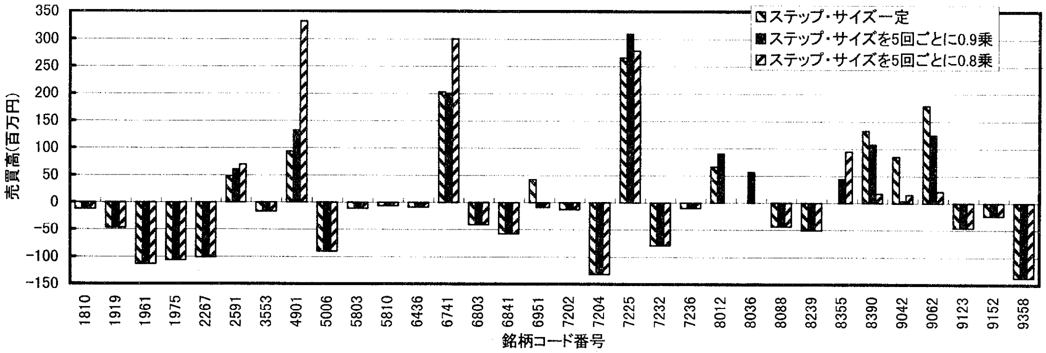


図4 ステップ・サイズ（β）の設定別リバランス解（800 証券）
Fig. 4 Results of rebalance to various step-sizes β (800 stocks).

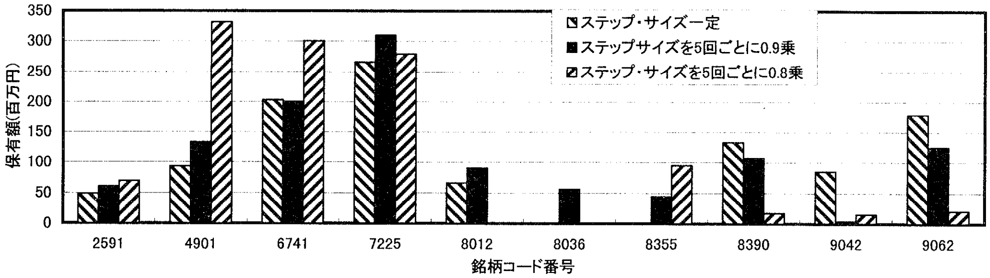


図5 ステップ・サイズ（β）の設定別リバランス後ポートフォリオ（800 証券，最良実行可能解で比較）
Fig. 5 Portfolio after rebalance to various step-sizes β (800 stocks, best feasible solutions).

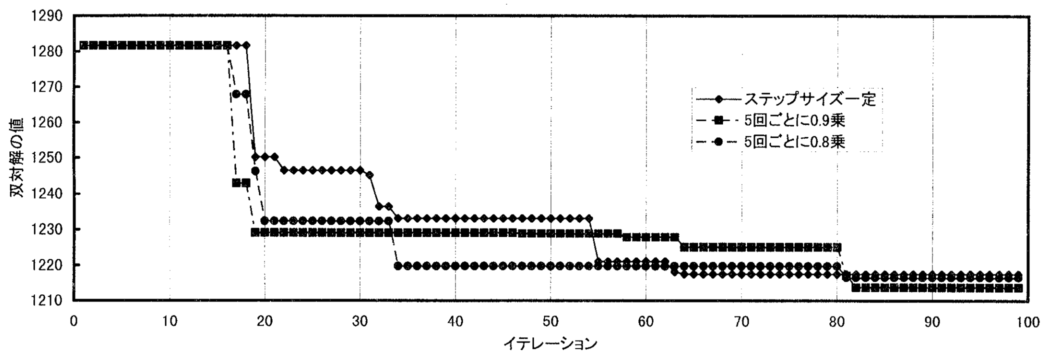


図6 ステップ・サイズ（β）の設定別解の収束のようす（800 証券，最良実行可能解で比較）
Fig. 6 Convergences of results to various step-sizes β (800 stocks, best feasible solutions).

精度は低くとも短い時間（少ないイテレーション回数）で解を得たいときはステップ・サイズを大きく変化させ，またより高い精度の解が要求されるときはステップ・サイズの変化を小さくし，かつイテレーション回数を増やす戦略をとるのが良いと思われる．

(iv) 図7，図8から，委託手数料を考慮したリバランス結果（ステップ・サイズを5回ごとに0.9倍した場合の最良実行可能解）と無視した結果の比較では，委託手数料を考慮したモデルでは限界費用のより低いクラスでの売買を行い，結果として無駄な売買を抑制している．この結果リバランス後のポートフォリオが異なることとなった．

(v) 図3から，手数料を考慮したリバランスにおいて残金が生じることとなったが，このことは自己充足性が等号では満たされず，残金額分の資産が運用されていないということである．実際に残金が大きいほど%Gap（上界値と下界値の差）が大きくなる傾向があり，そこでは最適解

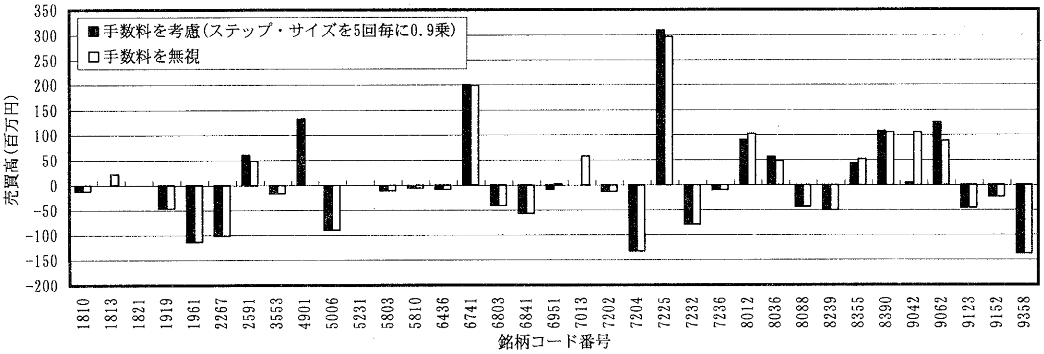


図7 手数料の考慮別リバランス解(800証券，手数料考慮はステップ・サイズを5回ごとに0.9倍した場合)
Fig. 7 Results of rebalance under commission fee or no fee (800 stocks).

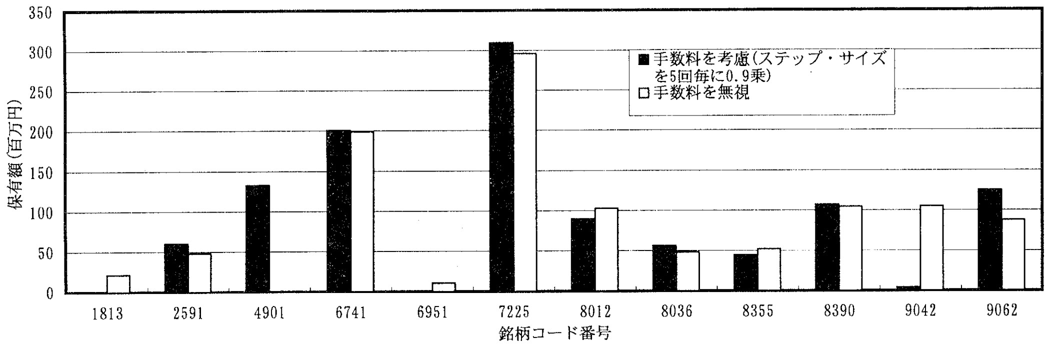


図8 手数料の考慮別リバランス後ポートフォリオ(800証券，手数料考慮はステップ・サイズを5回ごとに0.9倍した場合)
Fig. 8 Results of rebalance under commission fee or no fee (800 stocks).

と実行可能解とが乖離していることが予想される．より良い実行可能解を導出するヒューリスティック解法が望まれる．

5. 結　　論

委託手数料を考慮したリバランスモデルを，ラグランジュ緩和を用いて2つの独立な子問題に分割することにより，大規模なリバランス問題に対して有効な実行可能解を導出することができた．

謝辞 本稿作成にあたり貴重なコメントをいただいた東京商船大学の久保幹雄助教授に感謝する．

参 考 文 献

1) 井深　浩，葛山康典，大野高裕：手数料を考慮したポートフォリオのリバランスモデル，日本経営工学会春季大会予稿集，pp.136–137 (1994).
2) Markowitz, H.M.: Portfolio Selection, *J. of Fin.*, Vol.12, pp.77–91 (1952).
3) Konno, H. and Yamazaki, H.: Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market, *Manage. Sci.*, Vol.37, No.15, pp.519–531 (1991).
4) Perold, A.F.: Large-Scale Portfolio Optimization, *Manage.Sci.*, Vol.30, No.10, pp.1143–1160 (1984)
5) Balakrishnan, A., Magnanti, T.L. and Wong, R.T.: A Decomposition Algorithm for Local Access Telecommunication Network Expansion Planning, *Ops. Res.*, Vol.43, No.1, pp.58–76 (1995).
6) Bertsimas, D. and Orlin, J.B.: A Technique for speeding up the solution of the Lagrangean dual, *Math. Prog.*, Vol.63, pp.23–45 (1994)
7) Fetterolf, P.C. and Anandalingam, G.: A Lagrangean Relaxation Technique for Optimizing Interconnection of Local Area Networks, *Ops. Res.*, Vol.40, No.4, pp.678–688 (1992).

付録 Turnover 制約について

実務ではリバランスに際して回転率(turnover)制約を課すことがある．

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} \left| x_j^k \right|}{\sum_{j=1}^{N} r_j h_j} \leq \theta, \quad \text{ただし，} \theta \text{：回転率} \tag{20}$$

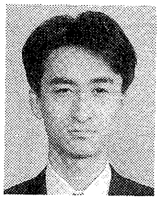
これに対しては，子問題 $\mathrm{PR_M}$ の制約に以下の式を付け加えればよい．

$$\sum_{j=1}^{N} v_j \leq \theta \sum_{j=1}^{N} r_j h_j \tag{21}$$

$$y_j - \sum_{k=1}^{K} c_j^k + v_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, N$$

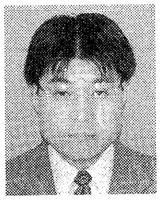
$$y_j - \sum_{k=1}^{K} c_j^k - v_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, N$$

(平成8年12月24日受付)
(平成9年 9月10日採録)



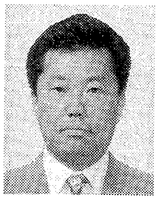
井深　浩（正会員）

1970年生．1994年早稲田大学理工学部工業経営学科卒業．1996年同大大学院理工学研究科工業経営学専門分野修了．同年三菱化学（株）入社，横浜総合研究所勤務．



葛山　康典（正会員）

1965年生．1989年早稲田大学理工学部工業経営学科卒業．1996年早稲田大学社会科学部専任講師．博士（工学）．企業財務論，ファイナンスの研究に従事．日本OR学会，日本経営財務研究学会，日本経営工学会など各会員．



大野　高裕（正会員）

1956年生．1976年早稲田大学理工学部工業経営学科卒業．1994年早稲田大学理工学部教授，工学博士．企業戦略，企業倒産の研究に従事．日本経営工学会，日本経営システム学会など各会員．