データ点で接続しない円弧スプライン補間曲線*

1AD−2　黒田 満† ○西村 信幸† 倉賀野 哲造†† 久保 哲夫†††
豊田工業大　ソニー（株）　クボテック（株）

1. はじめに

円弧補間は G^1 連続にすぎないけれども数値制御機械へポストプロセス抜きで直接入力して利用できるために古くから広く利用されてきた．特に1スパンを接線連続な2つの円弧で張る双円弧補間は柔軟性も高いために二十年前から研究が始まり[1]，多くの論文が出版されて現在も依然として研究されている[2]．滑らかな曲線を得るために曲率2乗積分（歪みエネルギー）最小化のための局所的手続きによるものが多い．局所座標系の導入をはじめ随所に独特の工夫がなされていて発見的である上，通過点配置に依存する繁雑な分類に基づいていたりと，個別的な議論が多くて一般的に論じられていないために全体像を把握することが難しい．

また，補間曲線を定めるためのデータ点は必然性をもって選ばれたというよりも仮に選ばれたものも少なくないと考えられる．しかし，通常のパラメトリック表現のスプラインでは一般にこのデータ点をセグメントの接続点にするし，この拘束をはずすして節点を変数化して自動決定することは，曲線式の各座標成分（x, y, z）を同一のパラメータで全く独立に表現しているために困難な問題を生ずる．一方，円弧補間ではこの拘束を簡単にはずすことができる．ただ，自由度と拘束条件の間のすっきりした把握がなされていないのと，非線形のチョッとした計算が必要になって，増大する自由度を手軽に制御しきれないためかあまり研究されてこなかった[3,2]．

そこで本研究では一般的な立場から円弧補間問題にアプローチして自由度と拘束条件の関係を具体的に整理して示すと共に，節点（差分）を（未知数として）「エネルギー」ミニマム条件から決めることで曲線の滑らかさと表現力を向上させることができることを示す．これは単円弧，双円弧補間で比較的容易に実現することができる．

2. 円弧補間曲線

平面曲線 $\boldsymbol{r}$ は一般に式 (1) のように表され，単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ および曲率 κ とは式 (2) の関係にある．

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}_0 + \int_0^s \begin{pmatrix} \cos\psi(s) \\ \sin\psi(s) \end{pmatrix} ds \tag{1}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\psi(s)}{ds} = \kappa\boldsymbol{n} \tag{2}$$

ここで $\psi(s)$ は接線（と x 軸との成す）角で，s は弧長パラメータである．円弧補間では $\psi(s)$ は図1のように折れ線となる．従って折れ線の頂点列を未知数として全曲線形状を記述できる．

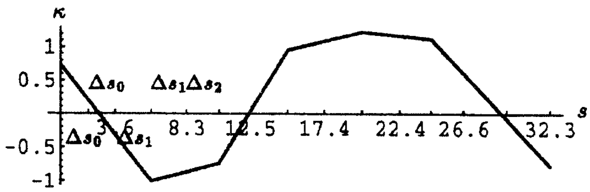
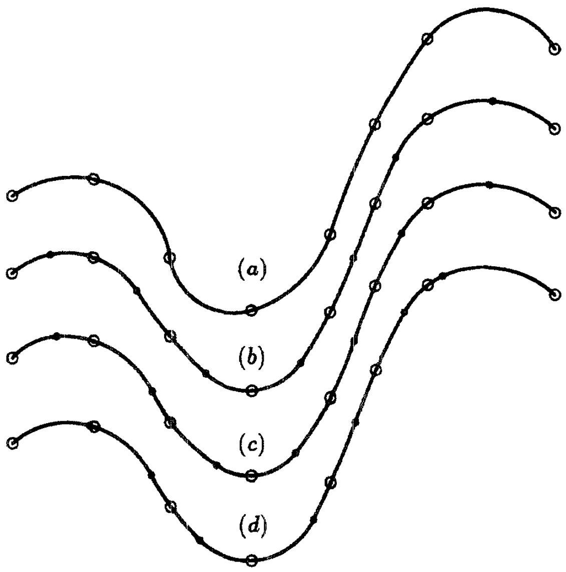


図1 接線角 $\psi(s)$ の例

横軸上で値を付した目盛はデータ点に対応し，他の目盛は円弧の接続点に対応する．従って「データ点が接続点」の拘束をはずせば通過点数に比例する自由度（未知数）を得ることができる．ただ，エネルギ最小化のための典型的な局所的手法の一つによれば「各スパン内にほとんど等しい長さの2円弧を生ずる[4]」ので，これを利用すれば横軸方向の未知数（節点差分）を減らすことができる．図中にはこのときの節点差分列 $\{\Delta s_i\}$ を一部示している．曲線の表現力を増すためにスパンに円弧を1つ挿入すれば，1頂点分，つまり未知数が2個増える．このとき，横軸上で節点差分が他から従属的に決まるようにすれば自由度の増加は1にとどまる．ψ は簡単に積分できて，補間および他の必要な制約条件を満たすように連立方程式を導くことができる．

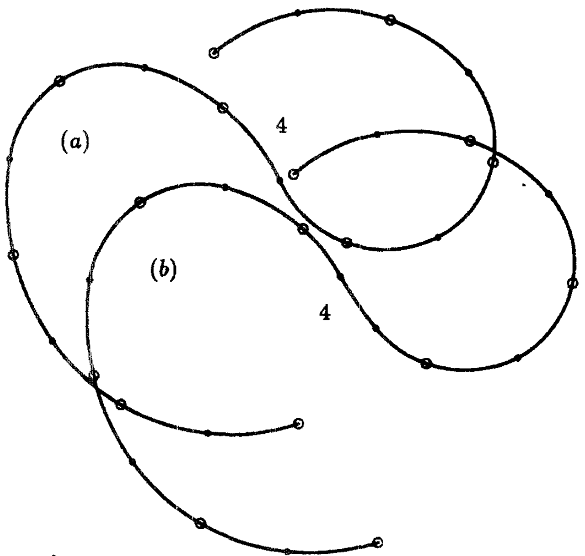
本研究ではこの連立方程式を数式処理システム（Mathematica）を用いてニュートン法で，パラメトリック3次の C^2 補間曲線からの初期値を使って解いている．そこでは先ずデータ点を接続点として定式化してから前後の円弧を同一視する条件を付加して解いてい

*Arc splines passing through data points as non-junction points
Mitsuru Kuroda, Nobuyuki Nishimura, Tetsuzou Kuragano and Tetsuo Kubo
†Toyota Technological Institute
2-12-1 Hisakata, Tempaku, Nagoya 468, Japan
††Sony
6-7-35 Kitashinagawa, Shinagawa, Tokyo 141, Japan
†††Kubotek
4-3-36 Nakanoshima, Kita, Osaka 530, Japan



$$\int \kappa^2 ds = \ (b)\ 1.62764,\ (c)\ 1.67529,\ (d)\ 1.59949$$

図 2 (a) 単円弧補間曲線，(b) 本方法の曲線，(c) エネルギ最小曲線（繰り返し２回目），(d) エネルギ最小曲線（繰り返し４回目）



$$\int \kappa^2 ds = \ (a)\ 2.2858,\ (b)\ 2.22896$$

図 3 (a) 各スパン中央に接続点をもつ曲線，(b) 第４スパンに１円弧挿入した曲線

る．Mathematica ではこのような媒介変数による置換をする簡便なプログラミングによる方が計算が早い．

3.　曲線例

図２に曲線例を示す．白い丸はデータ点である．(a) は（単）円弧補間曲線である．(b) は本方法による曲線で，スパン内で出会う円弧の長さが等しいという **2.** で述べた条件を使っている．このときスパン数 n 個に対して未知数が $2n+2$ 個で補間条件が $2n$ 個なので２つ拘束条件を追加するために，両端の円弧は隣の円弧と一体であるという制約を与えている．(a) と比べて１スパン増えただけなのに (b) は格段に滑らかになっているように見える．実は図１はこのときの接線角のグラフであった．(c) と (d) では全ての節点差分を独立とし，条件付変分問題としてエネルギ最小化問題を解いている．補間条件数だけのラグランジュの未定乗数が増えて問題は一気に倍近い規模になる．(c) は繰り返し計算が２回目のときの様子で (d) は４回目の繰り返し後に収束したときの曲線である．エネルギ値は図にあるように (c) では一時的に少し上がっている．しかし，(d) では結局 (b) より小さい値を達成しているが，いずれにしても (b) と (d) ではあまり大差は無い．

図３では (a) が各スパンの中央に接続点をもつ本手法による通常の曲線である．上から４番目のスパンが少し滑らかさを欠くので (b) ではここに円弧を１つ挿入して改善をはかっている．未知数と条件式とのアンバランスに対応するために好ましい性質をもつ Moore-Penrose の疑似逆行列を使って曲線を導いている．ちなみにエネルギ値は図のように改善されている．

4.　ま と め

一般的な立場から円弧補間を見直して自由度と拘束条件の関係を整理すると共に，円弧の接続点をスパンの曲線に沿う中央にとることによって１スパン増やすだけで大幅に滑らかさを改善できることを示した．

参考文献

1) Bolton, K.M.: Biarc curves, *Computer Aided Design*, Vol.7, No.2, pp.89–92 (1975).
2) Meek, D.S. and Walton, D.J.: Planar osculating arc splines, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.13, pp.653–671 (1996).
3) Bu-qing, Su and Liu, D.Y.: *Computational Geometry — Curve and Surface Modeling*, Academic Press, San Diego, pp.199–202 (1989).
4) Schönherr, J.: Smooth biarc curve, *Computer Aided Design*, Vol.25, No.6, pp.365–370 (1993).