

単位 4 元数積分曲線

三 浦 憲 二 郎†

本研究では、4 元数を用いて定義される、美しさを追求した新しい自由曲線：単位 4 元数積分曲線を提案する。これまでの Bézier 曲線や B-spline 曲線といったパラメトリック曲線よりも、曲率や曲率の変化率をより直接的に制御するために、単位 4 元数積分曲線では曲線の接線を単位 4 元数曲線を使って定義する。この曲線はクロソイド曲線の 3 次元空間への拡張・一般化になっており、接線ベクトルの大きさはつねに 1 であるとともに、曲率や曲率の変化率が比較的単純な式で与えられる。

Unit Quaternion Integral Curve

KENJIRO T. MIURA†

This paper proposes a new type of free-form curves for fairness called unit quaternion integral curve. We use unit quaternion curves to specify the tangent of the curve in order to more directly manipulate its curvature and variation of curvature than is possible for the traditional parametric representations like Bézier and NURBS curves. The unit quaternion integral curve can be said an extension of the clothoid curve and the norm of its tangent is always equal to 1. Its curvature and variation of curvature are given by rather simple expressions.

1. はじめに

“美しい (fair)”, あるいは“見た目に心地よい (visually pleasing)” 曲線の生成は様々な分野で重要であり、特に工業デザインやスタイリング分野では製品の良否を決定する主要因となっている。Sapidis¹⁾は現在の研究を以下の 3 つのカテゴリに分類している：

- (1) “美しさ (fairness)” や “形状の品質” を数学的に定義する。
- (2) 美しさを保証する新しい曲線や曲面式を開発する。
- (3) 曲面の特徴を損なわずに、不良箇所を指摘、修正する。

曲線や曲面に、 C^0 や C^1 , C^2 連続性といった関数の連続性や、 G^0 や G^1 , G^2 連続性といった幾何連続性を持たせてもそれらが美しいとは限らず、それらの品質を判断する連続性とは異なる基準が望まれている。

現在の研究の第 1 のカテゴリは、どういった曲線・曲面が“見た目に心地よい”かについての美的な判断基準に関する研究である。Roulier と Rando²⁾は、“美しさ”の基準は本質的に定義不可能であると前置きをしながらも、曲線や曲面の応力エネルギーを最小にす

るといった既存の美しさの尺度について議論している。曲線の応力エネルギーは、

$$\int \kappa(s)^2 ds \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\kappa(s)$ は曲面の弧長 (arc length) の関数である曲率である。曲面では、応力エネルギーは最大、最小主曲率の 2 乗和の面積分として、

$$\int (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA \quad (2)$$

で与えられる。特に曲面の応力エネルギーの最小化はさかんに研究されている (たとえば、文献 3)~5))。

Moreton と Séquin⁶⁾の研究は第 2 のカテゴリに属し、非常に美しい自由曲面を生成するために、曲率の代わりに曲率の変化率の面積分を最小化する方法を提案している。しかしながら、曲率や曲率の変化の最小化は曲面の設計者/デザイナーの意図を直接反映するものではなく、自ずと限界がある。

第 3 のカテゴリの研究としては、B-スプライン曲線や曲面の平滑化をノットの挿入によって行う方法が提案されている^{7),8)}。また、自動車産業では、疑似ハイライト曲線 (pseudo-highlight line) や反射線 (reflection line) が曲面評価に利用されている。これらの曲線は、入射光と曲面の法線に関する微分方程式で与えられるシルエット曲線として定義される。滑らかな反射線が得られるためには、曲面の曲率が滑らかに変化するこ

† 静岡大学工学部機械工学科

Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

とが必要である。

これまで論じたように、“美しい”曲線とは何か、どのような性質を持つべきかに関する明確な数学的定義は存在しないし、美しい曲線や曲面を生成する決定的な方法は存在しない。しかしながら、美しさを決定する要因として「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることは共通の認識である。したがって、曲線や曲面の接線方向や法線だけでなく、曲率や曲率の変化率をより直接的に制御できる方法が望まれる。

このようなアプローチを取る方法としては、Higashiら¹²⁾によって行われた研究があげられる。彼らの方法では、縮閉線 (evolute) から曲面形状を決定し、曲率分布を直接的に制御する。曲線に対してより直接的に曲率や曲率の変化を規定する方法はクロソイド曲線である^{13)~15)}。

クロソイド曲線 (コルニユの螺旋) はきわめて滑らかな (したがって、美しい) 2次元曲線 (平面曲線) として知られ、高速道路の設計やロボットのコーナ軌道制御¹⁶⁾に用いられている。この曲線はフレネル (Fresnel) 積分を用いて以下のように定義される¹⁵⁾：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \pi B \begin{pmatrix} C_s(t) \\ S_n(t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ここで、スケール係数 πB は正であり、フレネル積分は、

$$\begin{aligned} C_s(t) &= \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \\ S_n(t) &= \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \end{aligned} \quad (4)$$

である。クロソイド曲線は、曲線の長さに比例して曲率が連続的に変化する。曲線の形状を得るために積分が必要となるが、弧長の定数倍をパラメータとする三角関数によって一定の大きさ (ノルム) を持つ接線ベクトルを指定して曲線を定義するのが、クロソイド曲線の構成法である。

一方、3D アニメーションでは、剛体の向き (orientation) を指定するために、 $SO(3)$ 空間で定義される単位 4 元数曲線 (unit quaternion curve) が使われている。Kim ら¹⁹⁾は高階の微分係数まで閉じた形式で与えられる単位 4 元数曲線の新しいクラスを提案している。

剛体の向きを指定することは、一定のノルムを持つベクトルの向きを指定することと等価と考えられるので (厳密にいうと、ベクトル回りの回転は不要なので剛体の向きを指定するよりも少ない自由度で十分である。6 章参照)、曲線の方向ベクトルを 4 元数曲線を

使って指定することを考える。本研究では、この指定法を利用して、クロソイド曲線を 3次元に拡張・一般化し、美しさを追求した新しいタイプの自由曲線：単位 4 元数積分曲線 (unit quaternion integral curve) を提案する。

2. 4 元数の性質

2.1 4 元数の 4 則演算²⁰⁾

複素数 z が $z = a + bi$ ($a, b \in R$) と表されるように、4 元数 (quaternion) q は、

$$q = a + bi + cj + dk \quad (5)$$

と表される。ここで、 $a, b, c, d \in R$ であり、 i, j, k は異なる虚数単位である。2 つの 4 元数 $q_0 = a_0 + b_0i + c_0j + d_0k$ と $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ の和 $q_0 + q_1$ を求める加算は、

$$\begin{aligned} q_0 + q_1 &= (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)i \\ &\quad + (c_0 + c_1)j + (d_0 + d_1)k \end{aligned} \quad (6)$$

と定義される。また、差を求める減算は加算の逆演算として定義される。

乗算は、 i, j, k の間の積として、

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ji = -k,$$

$$jk = i, \quad kj = -i,$$

$$ki = j, \quad ik = -j$$

(7)

が定義され、したがって、

$$\begin{aligned} q_0q_1 &= (a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1) \\ &\quad + (a_0b_1 + b_0a_1 + c_0d_1 - d_0c_1)i \\ &\quad + (a_0c_1 + c_0a_1 + d_0b_1 - b_0d_1)j \\ &\quad + (a_0d_1 + d_0a_1 + b_0c_1 - c_0b_1)k \end{aligned} \quad (8)$$

と定義される。この式から分かるように、一般に $qq' \neq q'q$ である。商を求める除算は乗算の逆演算として定義されるが、乗算は積の順序に依存するので、右商 (right quotient) と左商 (left quotient) が存在する。

$q = a + bi + cj + dk$ の共役 (conjugate) \bar{q} は、

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad (9)$$

で与えられる。このとき、

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (10)$$

ここで、 $|q|$ を q のノルムと呼ぶ。ノルムに関して次の性質が成り立つ：2 つの 4 元数 q_0 と q_1 のノルムは積によって不変である、すなわち、

$$|q_0q_1| = |q_0||q_1|. \quad (11)$$

$q = a + bi + cj + dk$ の逆元 q^{-1} は $qq^{-1} = 1$ を満たす 4 元数であり、

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(a - bi - cj - dk)$$

$$= \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \quad (12)$$

通常、乗算はその順序に依存するが、共役との乗算は順序に依存せず、

$$q^{-1}q = 1 \quad (13)$$

となり、逆元を前からかけても結果は1となる。

2つの純粋なベクトル4元数 (pure vector quaternion: 実数部が0である4元数) $q_0 = b_0i + c_0j + d_0k$ と $q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$ の乗算は、式(8)より、

$$q_0q_1 = -(q_0, q_1) + [q_0, q_1] \quad (14)$$

と表せる。ここで、 (q_0, q_1) と $[q_0, q_1]$ は2つのベクトル4元数の内積

$$(q_0, q_1) = b_0b_1 + c_0c_1 + d_0d_1 \quad (15)$$

と外積

$$[q_0, q_1] = (c_0d_1 - d_0c_1)i + (d_0b_1 - b_0d_1)j + (b_0c_1 - c_0b_1)k \quad (16)$$

を表す。これらは i, j, k が x, y, z 軸にそれぞれ対応すると考えると、3次元空間のベクトルの内積、外積に一致する。

2.2 4元数と回転

与えられた単位4元数 $q \in S^3$ によって、3次元空間での回転 $R_q \in SO(3)$ が以下のように定義される:

$$R_q(p) = qpq^{-1}, \quad \text{for } p \in R^3. \quad (17)$$

ここで、 $p = (x, y, z)$ は4元数 $(0, x, y, z)$ と解釈し、積として4元数の乗算を行う。単位4元数 q は、角度 θ と単位ベクトル $\hat{v} \in S^2$ を用いて、 $q = \cos\theta + \hat{v}\sin\theta \in S^3$ と表される。このとき、 R_q は \hat{v} 軸回りの 2θ の回転である²⁰⁾。2つの対心点 q と $-q \in S^3$ は $SO(3)$ 空間の同じ回転を表し、 $R_q \equiv R_{-q}$ といえる。滑らかな回転曲線 (rotation curve) $R_q(t) \in SO(3)$ の角速度が $2\omega(t) \in R^3$ であれば、単位4元数曲線 (unit quaternion curve) $q(t) \in S^3$ は次式を満たす:

$$\frac{dq(t)}{dt} = q(t)\omega(t). \quad (18)$$

前節で述べたように4元数の乗算では交換法則が成り立たず、したがって乗算の順序が重要となる。 q_0, q_1, \dots, q_n を一連の回転とし、個々の q_i をグローバル座標系で定義すれば、積 $q_nq_{n-1}\dots q_0$ が全体としての回転を表す。しかしながら、 q_i をローカル座標で定義すれば、積 $q_0q_1\dots q_n$ が全体としての回転を表す。この回転はグローバル座標系で q_n, q_{n-1}, \dots, q_0 の順序で回転を施した場合に一致する。ローカル座標系を用いると、回転の順序と乗算の順序が一致するので、Kimら¹⁹⁾は滑らかな回転曲線を得るためにローカル座標系を用いて4元数曲線を定義した。この論文でもローカル座標系を用いて回転を定義する。

2.3 指数関数と対数関数

与えられたベクトル $v = \theta\hat{v} \in R^3$ と単位ベクトル $\hat{v} \in S^2$ に対して、 v の指数関数値:

$$\exp(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} = \cos\theta + \hat{v}\sin\theta \in S^3 \quad (19)$$

は単位4元数であり、 \hat{v} を軸として角度 2θ の回転を表す。ここで、 v^i は4元数の乗算を用いて計算される。指数関数 \exp は、 S^3 空間の値として与えられる角速度ベクトルから、回転を表す単位4元数への写像を定義している。指数関数 \exp の定義域を $|\theta| < \pi$ に制限すれば1対1の写像となり、その逆関数として対数関数 \log を単位4元数に対して定義することができる。単位4元数 q を実数値 α を指数とするべき (power) q^α は、

$$q^\alpha = \exp(\alpha \log q) \quad (20)$$

と定義される。

2つの単位4元数 q_0 と q_1 に対して、それらを結び、一定の接線速度 (tangential velocity) $\log(q_0^{-1}q_1)$ を持つ測地線 (geodesic curve) $\gamma_{q_0, q_1}(t) \in S^3$ は

$$\begin{aligned} \gamma_{q_0, q_1}(t) &= q_0 \exp(t \log(q_0^{-1}q_1)) \\ &= q_0(q_0^{-1}q_1)^t \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる。

2.4 Bézier 単位4元数曲線

Kimら¹⁹⁾はBézierとHermit, B-splineという3つのタイプの単位4元数曲線を提案した。この節では、それらの代表としてBézier単位4元数曲線の導出法について述べる。

階数 n のBézier曲線 $C(t)$ は、Bernstein基底関数 $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ を用いて、

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{n,i}(t) \quad (22)$$

と表される。ここで、 P_i は制御点である。この基底関数で表されたBézier曲線に対して、Bézier単位4元数曲線は以下のように定義される。

式(22)は次式のように変形できる。

$$p(t) = p_0 \tilde{B}_{n,0}(t) + \sum_{i=1}^n \Delta p_i \tilde{B}_{n,i}(t). \quad (23)$$

ここで、累積基底関数 (cumulative basis function) $\tilde{B}_{n,i}(t)$ は、

$$\tilde{B}_{n,i}(t) = \sum_{j=i}^n B_{n,j}(t) \quad (24)$$

である。累積形式に変形することによって、以下の階

数 n である Bézier 単位 4 元数曲線が得られる.

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q_0 \exp(\omega_1 \tilde{B}_{n,1}(t)) \exp(\omega_2 \tilde{B}_{n,2}(t)) \\
 &\quad \dots \exp(\omega_n \tilde{B}_{n,n}(t)) \\
 &= q_0 \prod_{i=1}^n \exp(\omega_i \tilde{B}_{n,i}(t)). \tag{25}
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\omega_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i) \tag{26}$$

である. $\tilde{B}_{n,0}(t) = 1$ であることに注意する. 特に $n = 2$ の場合, 式 (25) は,

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q_0 \exp(\omega_1 t) \\
 &= q_0 \exp(t \log(q_0^{-1} q_1)) \\
 &= \gamma_{q_0, q_1}(t) \tag{27}
 \end{aligned}$$

となり, 2 つの単位 4 元数 q_0 と q_1 を結ぶ測地線を表す.

3. クロソイド曲線の 3 次元への拡張

複素平面上の任意の平面曲線は再パラメータ化によって一般的に以下のような積分形式による曲線 $C(s)$ として表現できる:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s e^{i\theta} ds \tag{28}$$

$$= P_0 + \int_0^s (\cos \theta + i \sin \theta) ds. \tag{29}$$

図 1 で示したように, P_0 は曲線の始点であり, s は P_0 から $C(s)$ までの弧長である. θ は接線ベクトルと実軸とのなす角度である.

式 (3) のスケーリング係数を 1 としたクロソイド曲線のセグメントでは, 接線ベクトルのノルムはつねに 1 であり, θ はパラメータ s の 2 次式として以下のように与えられる:

$$\theta = c_0 + c_1 s + c_2 s^2. \tag{30}$$

接線ベクトル t と曲率 κ , 曲率の変化率 μ は

$$\begin{aligned}
 t &= e^{i\theta} = \cos(c_0 + c_1 s + c_2 s^2) \\
 &\quad + i \sin(c_0 + c_1 s + c_2 s^2), \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = c_1 + 2c_2 s, \tag{32}$$

$$\mu = \frac{d^2\theta}{ds^2} = 2c_2 \tag{33}$$

である. したがって, クロソイド曲線は曲率の変化率が定数である曲線だといえる.

クロソイド曲線を 3 次元に拡張するために, 4 元数 (quaternion) を用いて空間曲線の接線ベクトル t を以下のように指定する:

$$t = q \hat{v}_0 q^{-1}. \tag{34}$$

ここで, q は単位 4 元数 (unit quaternion) であり,

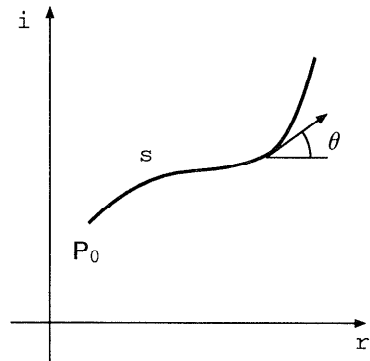


図 1 複素平面上の平面曲線

Fig. 1 General planar curve in the complex plane.

単位ベクトル $\hat{v}_0 = (x, y, z)$ は 4 元数 $(0, x, y, z)$ と解釈する. これ以降, 3 次元の点 $P = (x, y, z) \in R^3$ は 4 元数 $(0, x, y, z)$ と解釈する. このとき, 空間曲線 $C(s)$ は一般的に,

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds \tag{35}$$

と定義される. ここで, P_0 は始点, s は P_0 から $C(s)$ までの弧長であり, $q(s) \in S^3$ は 4 元数曲線である.

特別な場合として, xy 平面内のクロソイド曲線は, $\hat{v}_x = (1, 0, 0)$ と $\hat{v}_z = (0, 0, 0, 1)$ を用いて,

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_x q^{-1}(s) ds \tag{36}$$

と表される. ここで,

$$q(s) = \exp(\omega_z \frac{\theta(s)}{2}) \tag{37}$$

$$= \cos \frac{\theta(s)}{2} + \omega_z \sin \frac{\theta(s)}{2}. \tag{38}$$

$\theta(s)$ は式 (30) で与えられるので, $q(s)$ は,

$$\begin{aligned}
 q(s) &= (\cos \frac{1}{2}(c_0 + c_1 s + c_2 s^2), 0, 0, \\
 &\quad \sin \frac{1}{2}(c_0 + c_1 s + c_2 s^2)) \tag{39}
 \end{aligned}$$

となる.

4. 単位 4 元数積分曲線

4.1 単位 4 元数積分曲線の定義

前章でのべたように, 一般的に空間曲線は次式で表せる:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds. \tag{40}$$

ここで, \hat{v}_0 は単位定数ベクトルとする. 本研究では, この形式で 3 次元空間内の自由曲線を定義することを提案し, この曲線を単位 4 元数積分曲線, または名前

を簡略化して4元数積分曲線 (quaternion integral: QI curve) と呼ぶ。

4.2 接線ベクトルと曲率, 曲率の変化率

QI 曲線の接線ベクトル $t(s)$ は非常に簡単な次式で与えられ,

$$t(s) = \frac{dC(s)}{ds} = q(s)\hat{v}_0q^{-1}(s) \quad (41)$$

そのノルムはつねに1である。曲線の曲率 $\kappa(s)$ はベクトル $d^2C(s)/ds^2$ のノルムとして与えられ,

$$\kappa(s) = \left| \frac{d^2C(s)}{ds^2} \right| \quad (42)$$

$$= \left| \frac{dq(s)}{ds} \hat{v}_0q^{-1}(s) + q(s)\hat{v}_0 \frac{dq^{-1}(s)}{ds} \right| \quad (43)$$

と表される。この式は複雑に見えるが、以下に述べるように簡単化することができる。

単位4元数曲線 $q(s)$ の微分 $dq(s)/ds$ は、2章で述べたように,

$$\frac{dq(s)}{ds} = q(s)\omega(s) \quad (44)$$

と表せる。ここで、 $\omega(s)$ は純粋なベクトル4元数である。また,

$$\frac{dq^{-1}(s)}{ds} = \left\{ \frac{dq(s)}{ds} \right\}^{-1} \quad (45)$$

したがって,

$$\kappa(s) = \left| q(s)\omega(s)\hat{v}_0q^{-1}(s) + q(s)\hat{v}_0\{q(s)\omega(s)\}^{-1} \right| \quad (46)$$

$$= \left| q(s) (\omega(s)\hat{v}_0 - \hat{v}_0\omega(s)) q^{-1}(s) \right|. \quad (47)$$

式(11)に示したように4元数のノルムは乗算によっても不変であり、2つの純粋なベクトル4元数 α と β の乗算は、式(14)のように,

$$\alpha\beta = -(\alpha, \beta) + [\alpha, \beta] \quad (48)$$

と表せるので、式(47)は次式に変形できる:

$$\kappa(s) = 2 \left| [\omega(s), \hat{v}_0] \right|. \quad (49)$$

上式より、曲率の変化率 $\mu(s)$ は,

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \frac{d\kappa(s)}{ds} \\ &= \frac{4}{\kappa(s)} \left(\left[\frac{d\omega(s)}{ds}, \hat{v}_0 \right], [\omega(s), \hat{v}_0] \right) \end{aligned} \quad (50)$$

である。

5. クロソイド曲線の拡張

この章では、クロソイド曲線の2つのタイプの拡張

法について述べる。

5.1 拡張: タイプ 1

図2に示すように、3次元空間のベクトル \hat{v}_0 の向きを任意の向きに変更するには、 \hat{v}_0 と平行でない、少なくとも2つの異なる回転軸が必要である。

簡単な例として、図3に示したように、 \hat{v}_0 として $\hat{v}_x = (1, 0, 0)$ を、2つの回転軸として y 軸と z 軸を用いる。この場合、式(40)の $q(s)$ は,

$$q(s) = q_0 \exp(\omega_y \theta_y(s)) \exp(\omega_z \theta_z(s)) \quad (51)$$

と表される。ここで、 $\omega_y = (0, 0, 1, 0)$, $\omega_z = (0, 0, 0, 1)$ であり、 θ_y と θ_z は弧長 s の関数である。 $q(s)\hat{v}_xq^{-1}(s)$ によって、 \hat{v}_x はまず q_0 によって方向が変更され、次に y 軸回りに $\theta_y(s)$ だけ回転され、さらに z 軸回りに $\theta_z(s)$ 回転される。

$\theta_y(s)$ と $\theta_z(s)$ を s の2次関数と限定した場合、クロソイド曲線を3次元空間へ拡張した曲線が得られる。

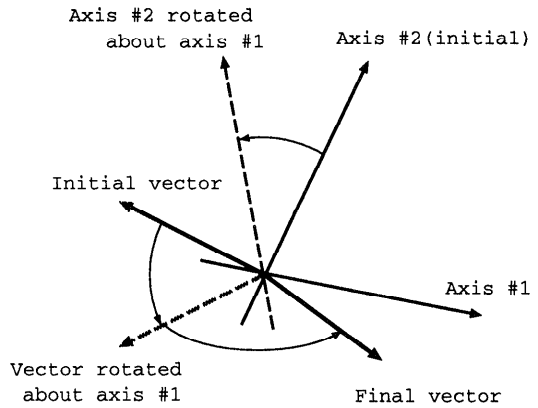


図2 2軸を用いた回転
Fig.2 Rotation using two fixed axes.

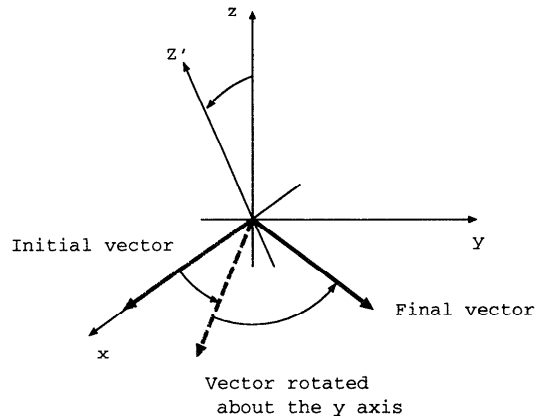


図3 y軸回りに回転, それからz軸回りに回転
Fig.3 The y, z axes for consecutive rotations.

図4 (2234 頁参照) では、このタイプの空間曲線を緑色で表示している。

$q_0 = 1$ とし、 $\theta_y(s) = c_{y0} + c_{y1}s + c_{y2}s^2$ とし、 $\theta_z(s) = c_{z0} + c_{z1}s + c_{z2}s^2$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{dq(s)}{ds} &= \exp(\omega_y \theta_y(s)) \omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} \exp(\omega_z \theta_z(s)) \\ &\quad + \exp(\omega_y \theta_y(s)) \exp(\omega_z \theta_z(s)) \frac{d\theta_z(s)}{ds} \\ &= q(s) \left(\exp(-\omega_z \theta_z(s)) \omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp(\omega_z \theta_z(s)) + \omega_z \frac{d\theta_z(s)}{ds} \right) \quad (52) \end{aligned}$$

であり、したがって、式(49)の $\omega(s)$ は、

$$\begin{aligned} \omega(s) &= \exp(-\omega_z \theta_z(s)) \omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} \exp(\omega_z \theta_z(s)) \\ &\quad + \omega_z \frac{d\theta_z(s)}{ds} \quad (53) \end{aligned}$$

となる。曲線の曲率 $\kappa(s)$ は、少し複雑ではあるが、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \\ &= \frac{2\sqrt{(c_{y1} + 2c_{y2}s)^2 \cos^2(2\theta_z(s)) + (c_{z1} + 2c_{z2}s)^2}}{q(s)} \quad (54) \end{aligned}$$

5.2 拡張：タイプ2

ここでは、クロソイド曲線が持つ以下の性質を保存するように3次元空間に拡張する。

クロソイド曲線の性質：クロソイド曲線が高速道路の設計に適しているのは、その曲率が弧長の線型(1次)関数であるため、高速道路上の運転手は、車が一定速度(速度ベクトルのノルムが一定)で走行しているならば、ハンドルを一定の角速度で回転させればよいからである。

この「定速であればハンドルを一定の角速度で回転させればよい」という性質を持つように3次元空間に拡張する。そこで、図5のように2つのハンドルを持つ宇宙船を想定する。1つのハンドルで左右方向(yaw)を制御し、別のハンドルで上下方向(pitch)を制御する。これらのハンドルは、車の運転と同様ローカル座標系に対する宇宙船の進行方向を制御する。速度を一定に保ったとき、この宇宙船のパイロットが、2つのハンドルを同時に、それぞれ一定の角速度で回転させて得られる軌道を考える。そのような軌道を与える曲線を式(40)で表すと、1つ1つのハンドルを独立に短時間ずつ回転させると考えて $q(s)$ は次式で与えられる。

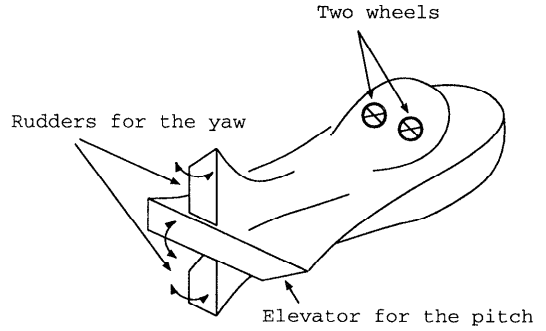


図5 2つのハンドルを持つ宇宙船

Fig. 5 A spaceship which has two steering wheels.

$$\begin{aligned} q(s) &= q_0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{\frac{s}{\Delta s}} \exp\left(\omega_y \frac{d\theta_y((i-1)\Delta s)}{ds} \Delta s\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\omega_z \frac{d\theta_z((i-1)\Delta s)}{ds} \Delta s\right). \quad (55) \end{aligned}$$

純粋なベクトル4元数 α と β について、一般に、

$$\exp(\alpha) \exp(\beta) \neq \exp(\alpha + \beta) \quad (56)$$

であり、式(51)と式(55)は本質的に異なる。図4では、このタイプの拡張した曲線を赤色で表示している。この図から分かるように、この曲線の曲率は比較的单純な変化をしているように見える。この理由について以下で検討する。

一般的には式(56)のように、 $\exp(\alpha) \exp(\beta)$ をより簡単化することはできず、式(55)も簡単化することができない。しかしながら、ノルムの十分小さな α と β に対しては、

$$\exp(\alpha) \exp(\beta) \approx \exp(\alpha + \beta) \quad (57)$$

が成り立つ。したがって、式(55)は次式に変形できる：

$$\begin{aligned} q(s) &= q_0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{\frac{s}{\Delta s}} \exp\left(\omega_y \frac{d\theta_y((i-1)\Delta s)}{ds} \Delta s\right) \\ &\quad + \omega_z \frac{d\theta_z((i-1)\Delta s)}{ds} \Delta s). \quad (58) \end{aligned}$$

上式に、図4の曲線例で用いたように簡単な2次関数 $\theta_y(s) = as^2$ と $\theta_z(s) = bs^2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} q(s) &= q_0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{\frac{s}{\Delta s}} \exp((\omega_y 2a(i-1)\Delta s \\ &\quad + \omega_z 2b(i-1)\Delta s)\Delta s) \\ &= q_0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{\frac{s}{\Delta s}} \exp((a\omega_y + b\omega_z) \\ &\quad \cdot 2(i-1)(\Delta s)^2). \quad (59) \end{aligned}$$

上式で, $(a\omega_y + b\omega_z)/\sqrt{a^2 + b^2}$ は単位ベクトルであり i に依存しない. したがって, 式 (59) はより簡単化でき,

$$\begin{aligned} q(s) &= q_0 \exp((a\omega_y + b\omega_z) \int_0^s 2s ds) \\ &= q_0 \exp((a\omega_y + b\omega_z) s^2) \\ &= q_0 \exp\left(\frac{a\omega_y + b\omega_z}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{a^2 + b^2} s^2\right) \end{aligned} \quad (60)$$

となる. 上式で表される $q(s)$ は, $(a\omega_y + b\omega_z)/\sqrt{a^2 + b^2}$ を軸とする回転を表し, 回転角 $\sqrt{a^2 + b^2} s^2$ は s の 2 次式となっており, 実は図 4 の曲線は 3 次元空間内の平面クロソイド曲線となっている.

一般的な $\theta_y(s)$ と $\theta_z(s)$ に対する曲線の曲率は以下のように計算できる. 曲率計算には式 (44) の $\omega(s)$ が得られればよいので,

$$\begin{aligned} \frac{dq(s)}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{q(s + \Delta s) - q(s)}{\Delta s} \\ &= q(s) \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\left(\omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} + \omega_z \frac{d\theta_z(s)}{ds}\right) \Delta s\right) - 1}{\Delta s} \end{aligned} \quad (61)$$

より,

$$\begin{aligned} \omega(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\left(\omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} + \omega_z \frac{d\theta_z(s)}{ds}\right) \Delta s\right) - \exp(0)}{\Delta s} \\ &= \omega_y \frac{d\theta_y(s)}{ds} + \omega_z \frac{d\theta_z(s)}{ds}. \end{aligned} \quad (62)$$

$q_0 = 1$, $\theta_y(s) = c_{y0} + c_{y1}s + c_{y2}s^2$, $\theta_z(s) = c_{z0} + c_{z1}s + c_{z2}s^2$ の場合には, 式 (49) に上式の $\omega(s)$ を代入して, 曲線の曲率 $\kappa(s)$ は, 次式で与えられる.

$$\kappa(s) = 2\sqrt{(c_{y1} + 2c_{y2}s)^2 + (c_{z1} + 2c_{z2}s)^2}. \quad (63)$$

以上論じたよう, このタイプの拡張は定義式が式 (55) のように複雑ではあるが, 3 次元空間内の平面クロソイド曲線を特別な場合として含み, 曲率は式 (63) のように比較的単純な式で表されるので, これを空間クロソイド曲線と呼ぶ. 定義式は複雑ではあるが, s の増加量 Δs に従って, $q(s)$ に回転量の増分を乗算することによって $q(s + \Delta s)$ が得られるので, 空間クロソイド曲線の形状を計算機で算出するのは容易である. 図 6 (2234 頁参照) に空間クロソイド曲線の例をいくつか示す.

6. QI 曲線に適した単位 4 元数曲線

前章で提案した空間クロソイド曲線は, 曲率が比較的簡単な式で与えられるので, 美しい曲線を設計する

のに適していると考えられるが, 接線ベクトルが明示的に定義されないという欠点を持つ. そこで, 空間クロソイド曲線よりは複雑な式で曲率が与えられるが, より定義しやすい QI 曲線として Kim ら¹⁹⁾ の提案する単位 4 元数曲線を QI 曲線の定義に利用することを考える.

2.4 節で述べたように, 剛体の回転を目的とした 4 元数曲線では, 彼らの Bézier 単位 4 元数曲線がそうであったように, 2 つの単位 4 元数 q_0 と q_1 を結ぶ曲線は測地線 $\gamma_{q_0, q_1}(t)$ となるように構成されている. 一方, QI 曲線の曲率は式 (49) で与えられるので, より簡単な曲率や曲率の変化率を得るためには, 単位 4 元数曲線の微分がより単純な式で表現されることが重要である.

そこで, この章では測地線に対する要求を諦め, より簡単な曲率を得るために新しい 4 元数曲線を提案する. 曲線の全長を l , パラメータ $t = s/l$, $\hat{v}_0 = \hat{v}_x$ として式 (40) を以下のように書き改める:

$$\begin{aligned} C(s) &= P_0 + \int_0^s q\left(\frac{s}{l}\right) \hat{v}_x q^{-1}\left(\frac{s}{l}\right) ds \\ &= P_0 + l \int_0^t q(t) \hat{v}_x q^{-1}(t) dt, \\ & \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (64)$$

この式の $q(t)$ を, 式 (22) で表される階数 n の Bézier 曲線を利用して以下のように定義する:

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp(\omega(t)) \\ &= \cos(\beta(t)) + \hat{v}(t) \sin(\beta(t)). \end{aligned} \quad (65)$$

ここで,

$$\hat{v}(t) = (0, 0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))), \quad (66)$$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_{n,i}(t), \quad (67)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{n,i}(t). \quad (68)$$

図 7 に示したように, α_i と β_i を曲座標値として次

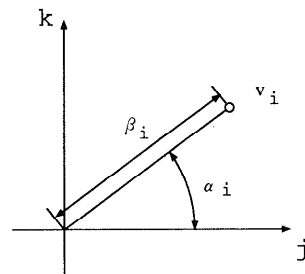
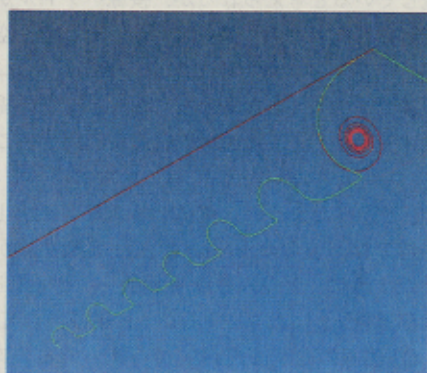
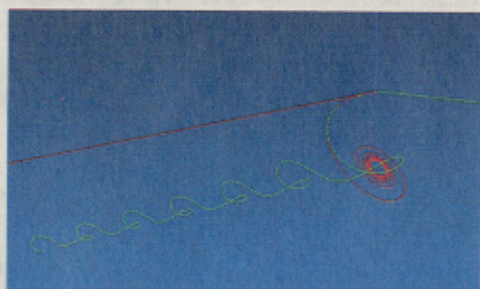


図 7 制御 4 元数
Fig. 7 Control quaternion.

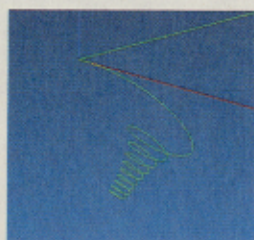


(a) Two curves extended from the clothoid

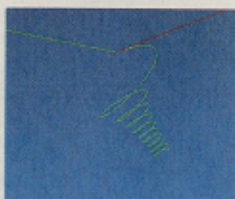


(b) The same curves in (a) from a different viewpoint

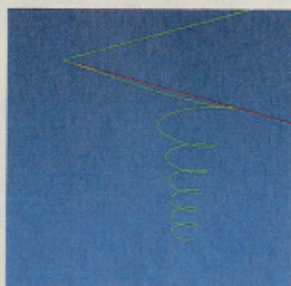
図 4



(a) $\theta_y = 0.2s^2 + 0.1s$,
 $\theta_z = 0.2s^2$



(b) The curve in (a)
from a different
viewpoint

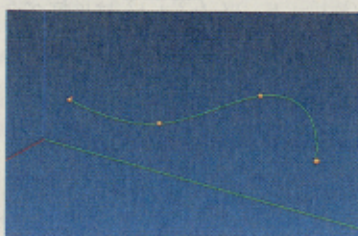


(c) $\theta_y = 0.1s$, $\theta_z = 0.2s^2$

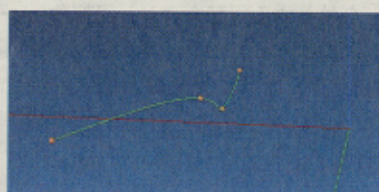


(d) The curve in (c)
from a different
viewpoint

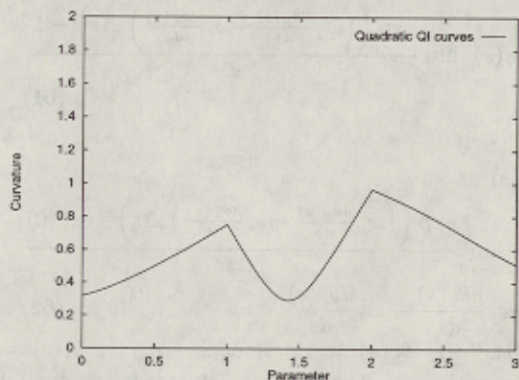
図 6



(a) Three quadratic QI curves con-
nected with G^2 continuity



(b) The same curves in (a) from a
different viewpoint



(c) Curvature profile

図 8

図 4 2つの拡張曲線の例 (タイプ1: 緑色, タイプ2: 赤色), 両曲線ともに $\theta_y = 0.2s^2$, $\theta_z = 0.2s^2$

fig.4 Examples of the extended clothoids (type 1: green curve, type 2: red curve) and for the same functions $\theta_y = 0.2s^2$, $\theta_z = 0.2s^2$.

図 6 空間クロソイド曲線の例

fig.6 Examples of space clothoid.

図 8 新しい4元数曲線に基づく QI 曲線の例

fig.8 Examples of QI curves based on a new quaternion curve-formulation.

式で与えられる 4 元数 $v_i \in R^3$, $i = 0, \dots, n$ は,

$$v_i = (0, 0, \beta_i \cos(\alpha_i), \beta_i \sin(\alpha_i)) \quad (69)$$

と制限され, その結果 $v_i \in R^2$ となる. $v_i \in R^2$ であっても接線の向きを指定するには十分である. なぜならば, 剛体の向きを指定するための一般的な回転に比べ, 接線ベクトルの指定ではそのベクトル回りに回転させても接線の向きは変化せず, その自由度が不要だからである. この制限により式 (65) で表される単位 4 元数曲線は $q(t) \in S^2$ となり, それによって表される回転の回転軸はつねに \hat{v}_x に直交する.

$q(t)$ は,

$$q(t) = (\cos(\beta(t)), 0, \cos(\alpha(t)) \sin(\beta(t)), \sin(\alpha(t)) \sin(\beta(t))) \quad (70)$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} = & \left(-\sin(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt}, 0, \right. \\ & -\sin(\alpha(t)) \sin(\beta(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ & + \cos(\alpha(t)) \cos(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt}, \\ & \left. \cos(\alpha(t)) \sin(\beta(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \right. \\ & \left. + \sin(\alpha(t)) \cos(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} \right) \quad (71) \end{aligned}$$

であり, 式 (49) の $[\omega(t), \hat{v}_x]$ は,

$$\begin{aligned} [\omega(t), \hat{v}_x] = & (0, 0, \cos(\alpha(t)), \\ & \sin(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \sin(\beta(t)) \cos(\beta(t)) \\ & + (0, 0, \sin(\alpha(t)), -\cos(\alpha(t)) \frac{d\beta(t)}{dt}). \quad (72) \end{aligned}$$

したがって, この単位 4 元数曲線を用いた QI 曲線の曲率 $\kappa(s)$ は, 式 (49) より,

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2 \sin^2(2\beta(t)) + 4\left(\frac{d\beta(t)}{dt}\right)^2} \quad (73)$$

となる.

$\omega_0 = (0, 0, \beta_0 \cos(\alpha_0), \beta_0 \sin(\alpha_0))$, $\omega_1 = (0, 0, \beta_1 \cos(\alpha_1), \beta_1 \sin(\alpha_1))$ の指数関数値として得られる 2 つの単位 4 元数 $q_0 = \exp(\omega_0)$, $q_1 = \exp(\omega_1)$ とを結ぶ測地線は, 式 (21) より,

$$\gamma_{q_0, q_1}(t) = q_0 \exp(t \log(q_0^{-1} q_1)) \quad (74)$$

として与えられるが, 式 (65) を用いた場合には,

$$\begin{aligned} q(t) = & \exp((0, 0, \cos((1-t)\alpha_0 + t\alpha_1), \\ & \sin((1-t)\alpha_0 + t\alpha_1)) \times ((1-t)\beta_0 + t\beta_1)) \quad (75) \end{aligned}$$

となり, これは測地線ではない. 図 8 (2234 頁参照) に式 (65) を用いて定義した QI 曲線の例とその曲率の

グラフを示す.

ここでは, Bézier 曲線に基づく新しい 4 元数曲線を定義したが, 同様に Hermit 曲線や NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) 曲線, その他の自由曲線を応用することができる.

7. おわりに

本研究では, 4 元数を用いて定義される美しさを追求した新しい自由曲線: 単位 4 元数積分 (QI) 曲線を提案した. この曲線はクロソイド曲線を 3 次元空間へ拡張・一般化したものであり, 定義に用いる単位 4 元数曲線を変更することによって様々な曲線を表現することができる. 特に, 単純な曲率変化を持つ空間曲線を空間クロソイド曲線として提案した.

QI 曲線はその形状を求めるために積分を必要とするが, 実用化するにはその高速化は重要な研究課題である. その他の研究課題は, QI 曲線による点列の内挿, QI 曲線の曲面への拡張等があげられる. また, QI 曲線は従来のパラメトリック曲線と大きくその性質が異なり, QI 曲線に独自の入力法や変形法が必要と思われる. 入力法, 変形法の研究とともに, 既存の曲線との混在を許しながら, QI 曲線をより使いやすくするシステムについても今後研究する.

参 考 文 献

- 1) Sapidis, N.S.: Preface, *Designing Fair Curves and Surfaces*, Sapidis, N.S. (Ed.), SIAM (1994).
- 2) Roulier, J. and Rando, T.: Measures of Fairness for Curves and Surfaces, *Designing Fair Curves and Surfaces*, Sapidis, N.S. (Ed.), pp.75-122, SIAM (1994).
- 3) Hagen, H. and Schulze, G.: Automatic Smoothing with Geometric Surface Patches, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.4, pp.231-236 (1987).
- 4) Williams, C.J.K.: Use of Structural Analogy in Generation of Smooth Surfaces for Engineering Purposes, *Comput. Aided Des.*, Vol.19, No.6, pp.310-322 (1987).
- 5) Lott, N.J. and Pullin, D.L.: Method for Fairing B-spline Surfaces, *Comput. Aided Des.*, Vol.20, No.10, pp.597-604 (1988).
- 6) Moreton, H.P. and Séquin, C.H.: Functional Optimization for Fair Surface Design, *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '92)*, pp.167-176 (1992).
- 7) Farin, G., Rein, G., Sapidis, N. and Worsey, A.J.: Fairing Cubic B-spline Curves, *Com-*

- puter Aided Geometric Design*, Vol.4, pp.91-103 (1987).
- 8) Farin, G., Rein, G. and Sapidis, N.: Curvature and the Fairness of Curves and Surfaces, *IEEE CG & A*, Vol.12, No.2, pp.52-57 (1989).
 - 9) Klass, R.: Correction of Local Surface Irregularities Using Reflection Lines, *Comput. Aided Des.*, Vol.12, No.2, pp.73-77 (1980).
 - 10) Higashi, M., Kohzen, I. and Nagasaka, J.: An Interactive CAD System for Construction of Shapes with High-quality Surface, Warman, E.A. (Ed.), *Computer Application in Production and Engineering CAPE '83*, pp.371-391, North-Holland (1983).
 - 11) Kaufmann, E. and Klass, R.: Smoothing Surfaces Using Reflection Lines for Families of Splines, *Comput. Aided Des.*, Vol.20, No.6, pp.312-316 (1988).
 - 12) Higashi, M., Tsutamori, H. and Hosaka, M.: Generation of Smooth Surfaces by Controlling Curvature Variation, *EUROGRAPHICS '96*, Vol.15, No.3, pp.187-196 (1996).
 - 13) Mehlum, E.: Nonlinear Splines, Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. (Ed.), *Computer Aided Geometric Design*, pp.173-207, Academic Press (1974).
 - 14) Walton, D.J. and Meek, D.S.: Clothoidal Splines, *Computers and Graphics*, Vol.14, No.1, pp.95-100 (1990).
 - 15) Meek, D.S. and Thomas, R.S.D.: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp.163-174 (1991).
 - 16) Makino, H. and Suda, H.: Continuous Path Control Using Clothoidal Interpolation, *Proc. 20th ISIR*, Tokyo, p.1159 (1989).
 - 17) Shoemake, K.: Animating Rotation with Quaternion Curves, *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '85)*, pp.245-254 (1985).
 - 18) Shoemake, K.: Quaternion Calculus for Animation, *Math of SIGGRAPH (ACM SIGGRAPH'91 Course Notes #2)* (1991).
 - 19) Kim, M.-J., Kim, M.-S. and Shin, S.Y.: A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives, *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '95)*, pp.369-376 (1995).
 - 20) Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S.: *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag (1989).

(平成9年3月13日受付)

(平成9年9月10日採録)



三浦憲二郎 (正会員)

昭和34年生。昭和57年東京大学工学部精密機械工学科卒業。昭和59年同大学院修士課程修了。同年、キヤノン(株)入社。機械系CAD/CAMシステムの開発に従事。平成3年コーネル大学機械工学科博士課程修了。平成5年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授。平成9年静岡大学工学部機械工学科助教授。Ph.D. 曲線・曲面の設計, CAD/CAM, 要素自動分割, マイクロマシン等に興味を持つ。ACM, ASME 各会員。