# 数理計画法に基づく重み付き制約充足問題の解法

6AH−6

蔡 東風　石塚 満
東京大学工学部電子情報工学

## 1 はじめに

人工知能における様々な理論と応用の問題は制約充足問題（CSP）に帰着できる．特に，実用的には重み付きCSPが重要であるが，これに関する研究はまだ不十分である[1]．

本論文では，変数の値に対する重み付きCSPを研究対象として，数理計画法を用いた「最適解参照WALK法」（WOS法）という近似解法を提案する．実験によって，特に緩い制約問題に対するWOSの有効性を示す．

## 2 重み付きCSP

### 2.1 CSP

変数n個のCSPは，三つ組(X,D,C)で表現できる．

**変数**集合：$X=\{x_1,...x_n\}$

**変域**集合：$D=\{D_1,...,D_n\}$

**制約**集合：$C=\{C_{ij} \mid C_{ij}\subseteq D_i\times D_j, 1\leqq i<j\leqq n\}$

各変域の要素を**値**，各制約の要素を**アーク**とよぶ．CSPの解とは，全ての制約$C_{ij}$を満たす値の組みである．

### 2.2 重み付きCSP

CSPの制約の各要素（アーク）または変数の各値に非負の数値の重みを付けて，解の重み和を最小にするような解を求める重み付きCSPは，実用上重要である．制約最適化問題（COP）[2]とも呼ばれる．ここで，COPは,次のように表現できる．

変数集合：　$X=\{x_1,...x_n\}$

重み付き変域集合：　$D_w=\{D_{w1},...,D_{wn} \mid D_{wi}=D_i\times R\}$

重み付き制約集合：　$C_w=\{C_{wij} \mid C_{wij}\subseteq C_{ij}\times R\}$

ここに，Rは非負の実数または整数の集合である．

実用上，値だけ或いはアークだけに重みを付ける問題が多．ここではそれぞれ，値に対するCOP(**VCOP**)とアークに対するCOP(**ACOP**)で表す．本研究はVCOPを研究対象とする．以下はVCOPの例である．

変数：$X=\{x_1,x_2,x_3\}$

重み付き変域：$D_{w1}=D_{w2}=D_{w3}=\{(r,1),(g,2),(b,3)\}$

重み付き制約：$Cw12=\{(r,g),(g,b),(b,r)\}$
$Cw13=\{(r,b),(g,r),(b,b)\}$
$Cw23=\{(r,b),(g,b),(b,r),(r,b)\}$

解の評価値：　$f(r,g,b)=1+2+3=6$;
$f(b,r,b)=2+1+2=5$;（最適解）

## 3 最適解参照WALK法（WOS法）

### 3.1 WOSの概要

最適化問題の解法を大きく分ければ，厳密解法と近似解法がある．厳密解法は，一般にNP−完全またはNP-困難である．実用的には，近似解法が重要になる．例えば，近年よく研究されている効率良い局所探索法などが挙げられる．しかし，通常の局所探索法はランダム初期値からスタートするので，COPのような最適化問題に対して効率がよいとは言えない．これに対して，本論文で提案するWOS法は，

1. VCOPを0-1整数計画問題（ILP）に帰着する
2. ILPに対応する緩和問題の**最適解**を求める．
3. 「**最適解の周り**」の局所探索によってVCOPの近似解を求める．

なので，効率がよい．

### 3.2 VCOPからILPへの帰着

VCOPの各変域の値$d_{ij}$をILPの一つの変数$x_{ij}$に対応させ，以下に示すような方法でVCOPをILPに帰着できる．

| | VCOP | ILP |
|---|---|---|
| 変数： | $X_i, D_i$ | $x_1,...,x_k,\ x_{i1}+...+x_{ik}=1$ |
| 制約： | $(d_{iu},d_{jv})\in\bar{C}_{ij}$ | $x_{iu}+x_{jv}\leqq 1$ |
| | $\bar{c}_{ij}=D_i\times D_j - c_{ij}$ | |
| 評価： | $z=\sum_{d_i\in 解} w_{id_i}$ | $z=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k} w_{ij}x_{ij}$ |

Method on Programming for Weighted CSP
Dongfeng Cai, Mitsuru Ishizuka
Dept. of Info. & Commn. Eng.,Univ. of Tokyo

WOS 法では，多数のアークをまとめて，一つの制約式を生成することを工夫する．

### 3.3 最適解

最適解が整数解にどれほど近いかを評価するために，整数度$\rho$を定義する．

解の整数度：　$\rho = 1/n \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{k} x_{ij}^2$　　（1）

整数度は$(1/k) \leq \rho \leq 1$．最適解が整数解の場合，明らかに整数度が1となる．

### 3.4 WOS 法の整数解の探索法

全体として，一般の局所探索法の枠組みとだいたい同じであるが，以下の三つの点で拡張した．

**(1) 初期値の生成**

整数最適解を探索するために，求めた最適解の周りで探索すればよい．WOS 法では，最適解の各変数$x_{ij}$の値を，VCOP の変数$X_i$が値$d_{ij}$を取る確率として，初期値を生成する．この方法を初期値生成の「**最適解参照確率法**」と呼ぶ．

**(2) 変数の値の選択**

制約違反最小戦略やランダム WALK[3]などが有名であるが，VCOP のような最適化問題に対して，制約充足だけではなく，解の評価関数値を最小化するような要求もある．これを本研究の言葉で言い換えると，「最適解の周り」あるいは「最適解から遠く離れないところ」で探索する要求である．制約違反最小戦略だけを使うと，はやく制約を充足するために，「最適解の周り」の初期値からだんだん遠く離れる可能性がある．これを防ぐために，探索する間にも，最適解を“見ながら”，離れないように“歩いた”ほうがよいと考えた．以上の考えに基づいて，最適解の周りで“散歩できる”ような値の選択方法，**値選択の最適解参照 WALK 法**を提案する．

[step1] もし$\rho < \rho_{min}$ならば，改悪可能(detenorate)の制約違反最小戦略を使用．

[step2] **WALK 確率**Pを計算する．

[step3] 確率Pで，この変数に対して前述の「最適解参照確率法」で選択する

[step4] 確率1－Pで，改悪可能の制約違反最小戦略を使用．

ただし，$\rho$は最適解の整数度である．$\rho_{min}$は**最小有効整数度**と呼ぶ．WALK 確率Pは整数度によって決める．

**(3) 解の改善処理**

毎回求めた解に対して，全ての制約を充足したままで，評価値の山登り処理を行う．

## 4．実験結果

実験用の VCOP 例題はすべてランダムによって生成した．（表1）からわかる．WOS 法は，

- 少なくともランダム VCOP 例題に対して，**解の精度が高く**，平均して B&B 法より遥かに速い．
- **厳しい制約問題より緩い制約問題に適用である．**

WOS, B&B, LSの比較実験(緩い制約問題：p=0.1)

| q(%) | | 評価関数値 | | | 時間(sec) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 整数度 | B&B | WOS* | LS* | B&B | WOS | LS |
| 25 | 1.0 | 805.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.2 | 0.0 |
| 35 | 1.0 | 709.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.3 | 0.0 |
| 45 | 0.8 | 687.6 | 2.6 | 5.0 | 0.1 | 1.4 | 45.5 |
| 55 | 0.6 | 556.8 | 1.6 | 19.0 | 6.3 | 2.7 | 70.2 |
| 65 | 1.0 | 354.2 | 0.2 | 2.4 | 2157.3 | 0.1 | 6.3 |
| 75 | 1.0 | 315.4 | 0.6 | 0.6 | 1202.5 | 0.1 | 0.3 |
| 平均 | **0.9** | **571.5** | **0.8** | **4.5** | **561.1** | **0.8** | **20.4** |

*:最適解(B&B)との差 小さいほどよい
B&B(Branch and Bound法)；LS(Local Search法)

## 5　今　後

本論文では，値に対する重み付きの制約充足問題(VCOP)に対して，数理計画法を用いた新しい近似解法を提案した．実験により，一般の VCOP，特に緩い制約の VCOP に対して，提案法の有効性を示した．今後の研究として，いまの WOS 法を改善するとともに，もっと多くの他の方法と比較する実験を行いたいと考えている．

### 参考文献

**[Tsang 93]** Edward Tsang.：Foundations of Constraint Satisfaction, ACADEMIC( 1993 ).

**[西原 97]** 西原 清一：制約充足問題の基礎と展望，人工知能学会誌，Vol.12 No.3, pp.3-10(1997).

**[Selman 93]** Selman, B. and Kautz, H.： An Empircal Study of Greedy Local Search for Satisfiability Testing, Proc. AAAI-93, pp.46-51(1993).