ニューラルネットワークと列挙法の組み合わせによるＳＡＴの解法

５ＡＧ－４

小濱　勇二　　永松　正博　　矢鳴　虎夫
九州工業大学工学部

１．はじめに

SAT（充足可能性問題）の解法には，列挙法，分枝限定法，GSAT 等の局所探索法，ラグランジュニューラルネットワークを用いた手法（LPPH）[1]等がある．列挙法や分枝限定法を用いた手法では，全ての充足解を見つけることができ，しかも充足可能か不可能かの判定もできるが，一般に解を求めるのに非常に長い計算時間を要する．局所探索法や LPPH 等の手法は，充足可能か否かの判定はできないが，充足解が存在する場合にその中の一つを比較的高速に見つけることができる．

本論文では列挙法の考え方を LPPH と組み合わせることにより，より高速に解を見つけることができる可能性があることを示す．

２．SAT（充足可能性問題）

SAT は，与えられた和積標準形（CNF）の論理式を真にする組み合わせを求める問題である．和積標準形の論理式Eは以下の様に定義される．

$$E = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m ,$$
$$C_r = L_{r1} \vee L_{r2} \vee \cdots \vee L_{rl}, \quad r = 1,2,\ldots,m \ .$$

Cは，節であり，m は節の個数を表わす．各リテラルLはブール変数x_iか$\bar{x}_i$がそれぞれ代入される．

３．列挙法等による SAT の解法

列挙法は，全ての変数の組み合わせに対して充足可能かどうかを判定する方法である．ただし，単純に列挙すると計算量が指数オーダー時間かかってしまうためさまざまな工夫が行われている．

その一つに分枝限定法がある．分枝限定法は，n 変数問題を適当な変数を０と１に固定して２個の n −1 変数問題に分割する操作を繰り返すことによって解を求める．部分問題に分割して行く過程で充足解の存在の有無が判別できる場合は以降の分割操作を省くことができる．

４．ラグランジュニューラルネットワーク (LPPH)

LPPH(Lagrange programming neural network for satisfiabilty problems of propositional calculus)は，ラグランジュの方法をベースとするニューラルネットワークである．離散的な SAT を CONSAT (Continuous valued SAT)と呼ばれる連続的な問題に置き換えこれを LPPH を用いて解く．

以下に CONSAT と LPPH の定義を示す．

$$\text{CONSAT}: \quad \text{find } x, \quad \text{such that} \quad \forall r : h_r(x) = 0 , \quad 0 \le x_i \le 1 \quad i = 1,2,\cdots,n ,$$

ここで，

$$h_r(x) = \prod_{p=1}^{n} g_{rp}(x) \qquad r = 1,2,\cdots,m ,$$

$$g_{rp}(x) = \begin{cases} x_i & L_{rp}\text{が負のリテラルとして}C_r\text{に存在,} \\ 1 - x_i & L_{rp}\text{が正のリテラルとして}C_r\text{に存在,} \\ 1 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

また，LPPH の状態方程式は以下のようなものである．

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i(1-x_i)\frac{\partial F(x,w)}{\partial x_i} = -x_i(1-x_i)\sum_{r=1}^{m} w_r \frac{\partial h_r(x)}{\partial x_i},$$
$$\frac{dw_r}{dt} = \frac{\partial F(x,w)}{\partial w_r} = h_r(x) \qquad r = 1,2,\cdots,m \ ,$$

ここで，$F(x,w)$はラグランジュ関数であり次のように定義される．

$$F(x,w) = \sum_{r=1}^{m} w_r h_r(x) ,$$

w_rは，節rの重みである．

LPPH の状態方程式の平衡点を求めることによっ

A Neural Network Approach Combined with the Enumeration Method for the Satisfiabilty Problems of Propositional Calculus

Yuzi Kohama, Masahiro Nagamatu and Torao Yanaru
Kyusyu Institute of Technology Tobata,Kitakyusyu Fukuoka 804, Japan

て CONSAT の解を求めることができる[2]．このことは，次のような制約条件付き最適化問題をラグランジュの方法でとくことに相当する．

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad 0\,, \\ &\text{subject to} \quad \forall r : h_r(x) = 0\,, \\ &\qquad\qquad 0 \le x_i \le 1 \qquad i = 1,2,\cdots,n\,. \end{aligned}$$

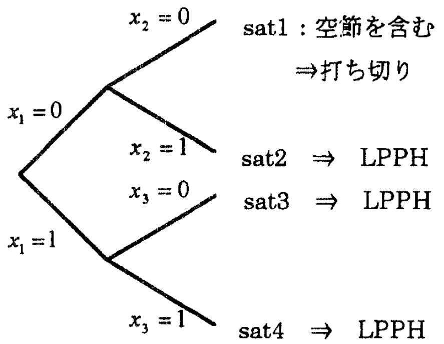
次式で示すように各重み w_r の減衰を考慮すると LPPH の解を探す時間を短縮できることが知られている[3]．

$$\frac{dw_r}{dt} = -\alpha w_r + h_r(x) \qquad r = 1,2,\cdots,m\,.$$

ここで，α は重みの減数率である．

５．LPPH と列挙法の組み合わせ

分枝限定法や DP の手法で，与えられた問題を幾つか変数の値を固定して小規模な問題に分割し，それぞれを並列に LPPH で解く方法を提案する．変数の値の固定により充足不能を判定できたもの（空節が生じたもの）は LPPH の実行を行わない．下図に分割で作られた深さ２の木の例を示す．



６．実験結果

ランダムに深さ３の木を作り，与えられた SAT の問題を８個の小問題に分割した．それらを LPPH で並列に解いたときの処理時間（“最も短時間で解を求めてきた LPPH の実行時間”×“並列実行された LPPH の数”）を測定し，与えられた問題を LPPH でそのまま解いた場合と比較した．問題には，m クイーン問題，ハミルトンサーキット問題とランダムに作った 3 SAT 問題を用い，200 回実行したときの平均を求めた．また，固定する変数を変えて 10 回同様の実験を行った．以下にそれらの結果を示す．なお，LPPH でそのまま解いた場合の処理時間を１としている．

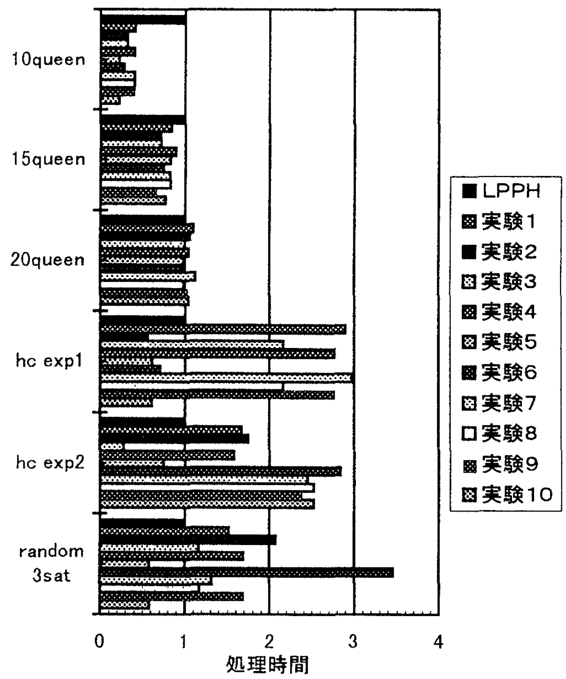


図1．実行結果

実験の結果，LPPH 単体で解くより速くなる分割が存在し，特に m クイーン問題が速くなりやすいことが確認できた．固定する変数の選びかたを見つけることが今後の課題である．

参考文献

[1] M.Nagamatu,and T.Yanaru,“Lagrange programming neural networks with polarized high-order connec-tions for satisfiability problems of propositional calculus,”*IIZUKA'94,The 3rd International Computing*,pp.233-235,August 1994.

[2] M.Nagamatu, and T.Yanaru,“On the stability of Lagrange programing neural networks for satisfiability problems of propositional calculus ”in*Proc.ANNES '95*,pp.71-74, November 1995.

[3] M.Nagamatu, and T.Yanaru, “Lagrangian Method for satisfiability problems of propositional calculus,”in*Proc.ANNES '95*,pp.71-74, November 1995.

[4]茨木 俊秀，講座．数理計画法８ 組み合わせ最適化 分枝限定法を中心として，産業図書，1983.