2H－4

為替交換問題に対する オンラインアルゴリズムの効率解析

檀浦 詠介 † 櫻井幸一 † 岩間一雄 ‡
† 九州大学大学院システム情報科学研究科 ‡ 京都大学工学部

1 はじめに

El-Yaniv らは為替交換問題に対して，単一方向アルゴリズムと双方向アルゴリズムという二種類のオンライン為替交換アルゴリズムを提案している [EFKT92]. 単一方向アルゴリズムとは，所持する通貨（ドル）を別の通貨（円）に交換するものであり，El-Yaniv らは提案した単一方向アルゴリズムの競合比が最適であることを証明している．一方双方向アルゴリズムとは，二つの通貨の間で交換を行なうことで利益を得ることを目的としたアルゴリズムであり，単一方向アルゴリズムを向きを交互に繰り返し適用することで実現されている．しかしながら競合比の上下限は一致しておらず，この双方向アルゴリズムは最適ではない．また，我々のこれまでの研究により，従来より優れた上下限が示されている [DS96] が，これも上下限は一致しておらず，最適アルゴリズムの設計は未解決である．

本稿では，双方向問題では特定の区間で不利益を受けても，他の区間で十分な利益を得られればよいという考えに基づき，前後の区間の相関関係を考慮することで双方向アルゴリズムの改良を行なう．さらに，従来よりも複雑な入力に対する最適アルゴリズムを示すことで，下限の改良も行なう．

2 為替交換問題のモデルとアルゴリズム

単一方向交換問題とは，所持するドルをできるだけ多くの円に交換することを目的としており，ドルから円という一方向のみの交換が可能である．これに対して双方向交換問題とは，二つの通貨の間で双方向の交換を行なうことにより，所持するドルを増やすことを目的とした問題である．

El-Yaniv らは，円相場の変動範囲を $[m, M]$，初期値を a とし，これらの値が知られているというモデルを設定し，そのモデル上でのオンラインアルゴリズムを議論している [EFKT92]. 本稿でも同じモデル上での議論を行なう．

為替交換問題における競合比は以下のように定義されている．期間 $[0, T]$ の間の円相場関数を $E(t)$，X というオンラインアルゴリズムにより得られる金額を $P_X(E)$，最適なオフラインアルゴリズムを OPT とすると，$\sup_E \frac{P_{OPT}(E)}{P_X(E)}$ が X の競合比である．

El-Yaniv らの提案した単一方向アルゴリズムは以下の3つの規則により構成されている．

規則 (1). 終了時には残りの全てのドルを円に交換する．

規則 (2). 終了時以外では，相場がそれまでの最高値に達した時のみ交換を行なう．

規則 (3). 相場がそれまでの最高値に達した時は，次の瞬間に円相場が m まで落ち，その後終了するまで変化しない場合でも r という競合比を実現するようにドルを円に交換する．

ここで r の最小値 r_* は以下の式を解くことで求められる．

$$r = \ln \frac{\frac{M}{m} - 1}{r - 1}.$$

定理 2.1 ([EFKT92]) この単一方向アルゴリズムは最適であり，競合比は r_* ($M/m = 2$ のとき $r_* = 1.278$) である．

また，[EFKT92] では，単一方向アルゴリズムを繰り返し適用するという双方向アルゴリズムが提案されている．つまり，相場の上昇区間と下降区間に分割し，各区間毎に単一方向アルゴリズムを向きを交互に適用するというものである．区間の数を k とすれば，この双方向アルゴリズムの競合比は明らかに r_*^k である．ただし [EFKT92] では，この双方向アルゴリズムは最適ではないことが述べられており，上限と共にに $r_*^{k/2}$ $((\sqrt{r_*})^k)$ という下限が示されている．つまり $M/m = 2$ の場合，[EFKT92] で示された上下限は $(1.278)^k$ および $(1.131)^k$ である．また [DS96] において，$(1.201)^k$ および $(1.133)^k$ という，改良された上下限が示されている．以下の章では $(1.195)^k$ および $(1.173)^k$ という上下限を示す．

3 双方向アルゴリズムの改良

我々の新しい提案アルゴリズムは，単一方向アルゴリズムの構造は変えずに，円相場が m と別の値 m' に落ちることを警戒するというものである．さらに，円相場がある値 (a_2) に達したときに，m' を別の値に切り替える（図1参照）．これを 2ステップ交換アルゴリズム（以下 2SC と記述）と呼ぶ．この動作は以下のようなものである．最初のステップ，つまり円相場が a_2 以下の間は，相場の変動範囲を $[m, M]$ でなく $[m_1, M_1]$ と仮定した最適単一方向アルゴリズム（以下 EFKT(a_1, m_1, M_1) と記述．ただし a_1 は円相場の初期値）を用いる．次のステップ，つまり円相場が a_2 以上のときは，EFKT(a_2, m_2, M) を用いる．

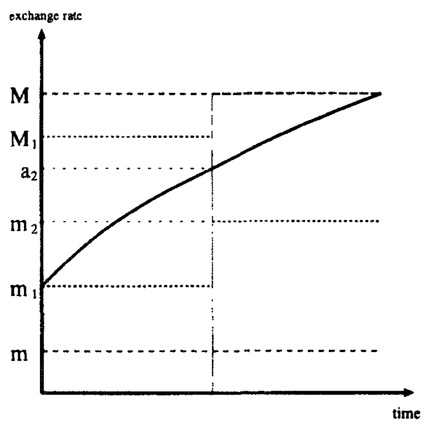

図 1: 2SC の概要

より厳密には，以下のような規則により構成されている．

On Analyzing the Bounds of On-line Currency Conversion
Eisuke Dannoura†, Kouichi Sakurai†, Kazuo Iwama‡
†Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University.
‡Department of Information Science, Kyoto University.

規則 (1). 円相場が r_1m_1 未満のときは，ドルを保持したままで，円への交換は行なわない．

規則 (2). 円相場が $[r_1m_1, a_2]$ の範囲のときは，EFKT(r_1m_1, m_1, M_1) を用いてドルを円に交換する．

規則 (3). 円相場が a_2 に達したときには，まず円相場 a_2 で全ての円をドルに戻す．このときのドルの額を初期値として EFKT(a_2, m_2, M) を適用し，ドルと円の比率を決定する．

規則 (4). 円相場が $[a_2, M]$ の範囲のときは，EFKT(a_2, m_2, M) を用いてドルを円に交換する．

規則 (5). 円相場の上昇が終了したのに気づいたとき，つまり円相場が落ちた時に，残りの全てのドルを円に交換する．

ただし，r_1 と r_2 はそれぞれ EFKT(a_1, m_1, M_1)（ただし $a_1 \le r_1m_1$）および EFKT(a_2, m_2, M) の競合比（定数）である．このことから，それぞれ以下の式を満たす．

$$r_1 = \ln \frac{\frac{M_1}{m_1} - 1}{r_1 - 1}, \quad r_2 = \ln \frac{\frac{M}{m_2} - 1}{r_2 - 1}.$$

ここで，この提案アルゴリズムでは，m_1, r_1, r_2 が以下の条件を満たすように定義する．

$$r_2 = 1 + \frac{a_2 - m_1}{a_2} \ln \frac{M_1 - m_1}{a_2 - m_1}, \quad m_1 = r_1 m$$

さらに，以下に示す $f(x)$ の最大値が r_1^2 となるように $f(w) = r_1^2$（ただし w は $f'(x) = 0$ の解）と定義する．

$$f(x) = \frac{r_1(a_2 - m_2)}{(r_2 - 1)x + a_2 - r_2 m_2} \times \begin{cases} r_1 & x \in [\frac{M}{r_1^2}, M] \\ R_1(\frac{mM}{x}) & x \in [\frac{mM}{a_2}, \frac{M}{r_1^2}] \\ R_2(\frac{mM}{x}) & x \in [m, \frac{mM}{a_2}]. \end{cases}$$

ただし $R_1(x), R_2(x)$ の定義は以下の通りである．

$$R_1(x) = 1 + \frac{x - m_1}{x} \ln \frac{M_1 - m_1}{x - m_1},$$

$$R_2(x) = 1 + \frac{x - m_2}{x} \ln \frac{M - m_2}{x - m_2}.$$

以上の条件を満たした上で，r_1 が最小となるような a_2 を求めることで，r_1 の最小値 R_* が求まる．このとき以下の定理が成り立つ．

定理 3.1 *2SC* の競合比は ${R_*}^k$（数値計算をすると，$M/m = 2$ のとき ${R_*}^k = 1.195^k$）である．

4 下限の改良

下限の証明は，ある特定の制限された入力を考え，その入力に対する最適なオンラインアルゴリズムの競合比を議論することで示すことができる．本章では，図 2 の入力に対する最適アルゴリズムを議論することで従来よりも大きな下限を示す．円相場は u から上昇を始め，$\widetilde{a}_2$ に達する前に m に落ち，その後 u まで上がる（パターン 1）．または，u から上昇して $\widetilde{a}_2$ を越えてから突然 d に落ち，d から減少して突然 u に上がる（パターン 2）．ここで，u と d は後で定義するが，以下の条件を満たすものとする．

$$\frac{M}{d} = \frac{u}{m} \le 1 + (\frac{M}{d} - 1)e^{\frac{M}{d}}.$$

また，$\widetilde{a}_2$ は以下の条件を満たすように定義される．

$$\frac{\widetilde{a}_2}{(d - m)}(1 - \frac{1}{\widetilde{r}_1}) - \ln \frac{M - d}{\widetilde{a}_2 - d} = 0,$$

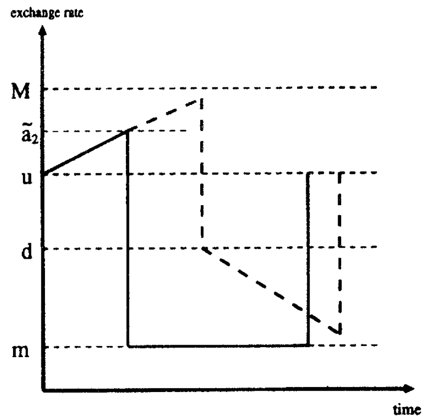

図 2: 新しい下限を示す入力

ただし，$\widetilde{r}_1$ は EFKT$^{-1}(d, m, u)$（円からドルという方向の EFKT アルゴリズム）の競合比である．つまり，

$$\widetilde{r}_1 = \frac{u - d}{u} \ln \frac{d(u - m)}{m(u - d)}.$$

である．

このような入力に対する最適アルゴリズムは，円相場 x が $x \in [u, \widetilde{a}_2]$ のときは EFKT$(u, m, \widetilde{M}_1)$，$x \in [\widetilde{a}_2, M]$ のときは EFKT$(\widetilde{a}_2, d, M)$，$x \in [m, d]$ のときは EFKT$^{-1}(d, m, u)$ を用いるというものである．ただし，$\widetilde{M}_1$ は以下のように定義される．

$$\widetilde{M}_1 = m + (u - m)e^{\frac{(\widetilde{r}_1\widetilde{r}_2 - 1)u}{u - m}}$$

また，$\widetilde{r}_2$ はパターン 2 の入力に対して最初の区間で得られる競合比であり，以下のように定義される．

$$\widetilde{r}_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{u - m}{\widetilde{r}_1 u} \ln \frac{\widetilde{a}_2 - m}{u - m} + \frac{(u - m)\widetilde{a}_2}{u(d - m)}(1 - \frac{1}{\widetilde{r}_1}).$$

このとき，この 2 区間の入力に対する競合比の最適値は $\widetilde{r}_1\widetilde{r}_2$ である．

ここでは 2 区間の場合について示したが，同様の手法で k 区間へ拡張することが可能である．拡張した結果より，以下の定理が導かれる．

定理 4.1 いかなるオンラインアルゴリズムも $\prod_{i=1}^{k} \widetilde{r}_i$（$M/m = 2$ かつ k が十分大きいとき，数値計算により $\prod_{i=1}^{k} \widetilde{r}_i \simeq 1.173^k$ となる）よりも小さな競合比を実現することはできない．ただし，$\widetilde{r}_i$ は以下のように定義される．

$$\widetilde{r}_i = \frac{1}{r_{i-1}} + \frac{u - m}{\widetilde{r}_{i-1} u} \ln \frac{\widetilde{a}_i - m}{u - m} + \frac{(u - m)\widetilde{a}_i}{u(d - m)}(1 - \frac{1}{\widetilde{r}_{i-1}}),$$

また，$\widetilde{a}_i$ は以下の式を満たすように選ばれる．

$$\frac{\widetilde{a}_i}{(d - m)}(1 - \frac{1}{\widetilde{r}_{i-1}}) - \ln \frac{M - d}{\widetilde{a}_i - d} = 0.$$

参考文献

[DS96] 檀浦詠介，櫻井幸一．二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムの設計と解析，情報処理学会論文誌，Vol.37 No.12, 1996.

[EFKT92] El-Yaniv, R., Fiat, A., Karp, R. and Turpin, G., "Competitive Analysis of Financial Games," *In Proc. of the 33rd FOCS*, pp.327-333, 1992.