形状情報付きレーブグラフによる３次元物体の構成

1Ｖ－3

田村 周 [†]　品川 嘉久 [†]

東京大学 [†]

1 レーブグラフ

物体の形状を特徴付ける要素として，特異点が考えられる．この特異点を用いて物体の構造を表す概念としてレーブグラフという位相不変量が存在する [1].

レーブグラフは次のように定義される [2]．f をコンパクト多様体 M から実数全体への関数とする．関数 f のレーブグラフとは次の同値関係 $\sim$ から定められる $M \times \mathrm{R}$ における商空間のグラフである．X_1, X_2 は $f^{-1}(f(X_1))$ の同じ連結成分に含まれ，かつ $f(X_1) = f(X_2)$ のときに $(X_1, f(X_1)) \sim (X_2, f(X_2))$ と定める．

例えばトーラスの高さ関数に関するレーブグラフは次のようなものになる．

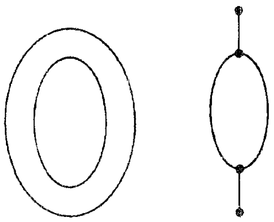

図 1: トーラスとそのレーブグラフ

高さ関数のレーブグラフにおいて，グラフの頂点は物体の特異点に対応し，グラフの枝は物体の切断面の輪郭線に対応している．

ところで，レーブグラフは物体の幾何的な情報を持たない位相的な概念であるため，レーブグラフだけを用いて物体の構造を復元することはできない．そこでレーブグラフを用いて３次元の物体を復元するために，物体の形状に関する情報をグラフに与えることで，拡張する．

- レーブグラフの頂点に３次元座標を与える．
- レーブグラフの枝の形状に意味を持たせる．
- レーブグラフに物体の輪郭線を与える．

このような形状情報を持つレーブグラフを定義する．

3D Object Construction Based on the Geometrical Reeb Graph. Shu Tamura[†] and Yoshihisa Shinagawa[†] The University of Tokyo[†]

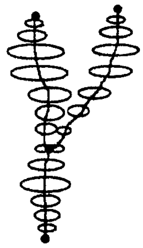

図 2: 形状情報を持つレーブグラフ

このグラフを物体の構造の骨組みとして３次元物体を構築する．

2 ホモトピー

X, Y を位相空間，$f, g : X \to Y$ を連続写像とする．f を連続的に変化させて g を得る時，f は g にホモトープであるという．また，f から g へのホモトピー H とは直積空間 $X \times [0,1] \to Y$ への連続写像で $H(x,0) = f(x)$,　$H(x,1) = g(x) (\forall x \in X)$ を満たすものである [3].

この概念は物体の複数の輪郭線から物体の表面を推定する際に用いられる [4]．つまり，f を上部の輪郭線，g を下部の輪郭線とし，そこに適当な写像を用意してその間の輪郭線を求めるのである．

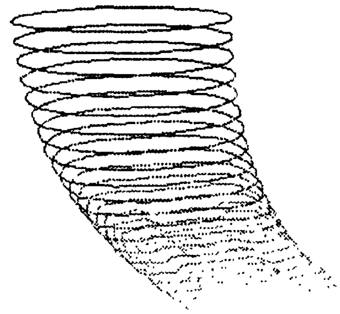

図 3: ホモトピー

この図３は上部の輪郭線が円，下部の輪郭線がＨ字形であるもののホモトピーを求め上部と下部の輪郭線の間の輪郭線を推定したものである．

3　3次元物体の構成

形状情報を持つレーブグラフとホモトピーの2つを用いてどのように物体を構成するかについて述べる．

3.1　輪郭線上の点の対応

まず，輪郭線と輪郭線の点同士の対応関係を求めなければならない．そのために上下の輪郭線をパラメタ化する．$I = [0,1]$ として輪郭線を $f, g : I \to R^3$ かつ $f(0) = f(1), g(0) = g(1)$ となるようにパラメタを入れる．パラメタの値は輪郭線の長さに比例するように振る．次にこの2つの輪郭線を xy 方向に関して長さ1の正方形に写像する．この写像された2つの輪郭線の中で最も近い点のペアを求める．写像を元に戻して，最も近い点のパラメタの値を0にして輪郭線のパラメタを振り直す．そして，上下の輪郭のパラメタ値が同じである点を対応しているとする．

3.2　輪郭線の推定

輪郭線上の点と点との対応関係を求めたら，その対応に基づくホモトピーを用いて輪郭線を求める．ホモトピーとしては次の写像を用意する．

- $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$
- $H(x,t) = (1-t^2)f(x) + t^2 g(x)$
- $H(x,t) = \sqrt{1-t^2}f(x) + (1-\sqrt{1-t^2})g(x)$
- Cardinal Spline 曲線
- Catmull-Rom Spline 曲線

次に問題となるのはレーブグラフの枝をとレーブグラフの枝が輪郭のどの部分を通過するかをどのように解釈するかということである．

上下の輪郭線の間のレーブグラフの枝 e を $I = [0,1]$ として $e : I \to R^3$ とする．そして，枝の移動量を表すエッジベクトル $ev(t) = e(t) - e(t - \delta t)$ を考える．

また，ホモトピーによって求められた輪郭線のパラメタ t に対する移動量をホモトピーベクトルと呼び hv で表す．これは，輪郭の有限個の点を選び，

$hv(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i(t) - p_i(t - \delta t))$ と定義される．

ここでスライディングベクトル $sv(t) = k(t)(hv(t) - ev(t))$ を考える．($k : I \to R, k(t) \geq 0, k(0) = k(1) = 0$ とする．) スライディングベクトルとは，ホモトピーによって求められた輪郭線が枝の形状によってどれだけ移動されるかを表す量である．輪郭線は $sv(t)$ だけ移動される．スライディングベクトルは $sv(0) = sv(1) = 0$ であるので，レーブグラフの枝は輪郭線の内部を通りさえすれば，枝が輪郭線の外部に突出するようなことはない．

4　まとめ

レーブグラフという位相的な概念に対して，物体の形状に関する情報を与えることで3次元の物体を構築することが可能である．

本研究のシステムでは，形状情報付きレーブグラフをレーブエディタというドローイングツールで定義しそれを用いて3次元物体を構築する．

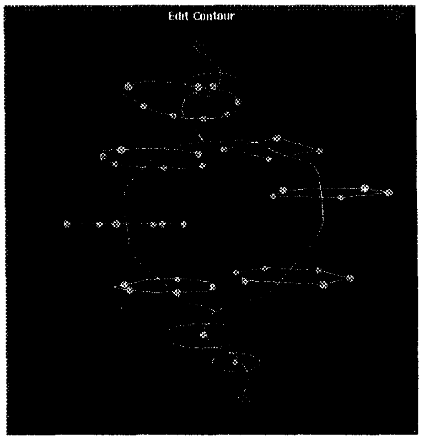

図 4: レーブエディタ

今後はレーブグラフに対して物体の内部構造に関する情報を与えることで拡張した埋め込みレーブグラフと本研究による形状情報付きレーブグラフを組合せたレーブグラフに基づいて，3次元物体を構築するようなシステムの開発に取り組みたい．

参考文献

[1] Y.Shinagawa,Y.L.Kergoisen,and T.L.Kunii, "Surface Coding Based on Morse Theory", *IEEE CG & A*,Vol.11,No.5,Sep.1991,pp.66-78

[2] Y.Shinagawa and T.L.Kunii, "Constructing a Reeb Graph Automatically from Cross Sections",*IEEE CG & A*,Vol.11,No.6, Nov.1991,pp.44-51

[3] 松本幸夫，『トポロジー入門』，(岩波書店,1985)

[4] Y.Shinagawa and T.L.Kunii , "The Homotopy Model : A Generalized Model for Smooth Surface Generation from Cross Sectional Data", *Visual Computer* ,Vol.7,No.3, March 1991,pp.72-86