# 局所探索に基づく重み付き制約充足問題の効率的解法

3M－5

蔡 東風　石塚 満
東京大学工学部電子情報工学科
e-mail: sai@miv.t.u-tokyo.ac.jp

## 1 はじめに

近年、制約充足問題（CSP）に関する研究が盛んであり、すべての制約が充足できない場合に対して、なるべく数多くの制約を満たすような、部分制約問題（PCSP）[2]最大制約充足問題（MAXCSP）[5]の研究も注目されている。しかし、様々な実用問題を考える時に、多数の解から最適解を求めるような制約充足最適化問題、例えば、制約に対する重み付き制約充足問題（WCSP）についての研究はとても重要であるが、まだ十分に研究されていない[3),6)]。

本研究では、WCSP を研究対象とし、局所探索に基づく WCSP の解決法を提案する。この方法の特徴は、まず整数の WCSP を実数の最適化問題に変換し、次に局所探索によって最適解或いは準最適解を求める点である。実験結果は方法の有効性を示している。

## 2 重み付き制約充足問題

制約充足問題（Constraint Satisfaction Problem）は次のように定義される[1)]。

| | | |
|---|---|---|
| 変数 | ： | $X_i$ (i=1,...,n) |
| 変数の領域 | ： | $D_i$ ($X_i$のが取り得る値) |
| 制約 | ： | $C_{ij}$ ($X_i$と $X_j$の可能な組合せ) |

CSP は全ての変数に対して制約に整合する値の割り当てを求める問題である。重み付き CSP（Weighted CSP) は重み $W_{ij}$ を各制約 $C_{ij}$ に付け、すべての制約の重みの和を最大にする値の割り当て（最適解）を求める問題である。全ての重み $W_{ij}=1$ の場合、WCSP はなるべく最多な制約を満たすような解を求める MAXCSP になる。従って、WCSP は CSP、MAXCSP を含む、もっと一般な問題である。ある割り当て $P=<v_1,...v_m>$ に対して、その重みの和の関数は次のように定義できる。

$$f(P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}r_{ij}(v_i,v_j) \qquad (1)$$

但し、$r_{ij}(v_i,v_j)=\begin{cases}1 & <v_i,v_j>\in C_{ij}\\ 0 & <v_i,v_j>\notin C_{ij}\end{cases}$

n は変数の数、m は変数の領域サイズ。

## 3 重み付き制約充足問題の解法

### 3.1 実数最適化問題への帰着

WCSP の m 値変数 $X_i$ を 0-1 変数 $x_{i1},...,x_{im}$ に対応させて、$X_i=u$ の場合、$x_{iu}=1$（以外は 0）にすると、式 (1) を次の式 (2) に書き換えることができる。更に 0-1 変数の領域 {0,1} を実数の領域 [0,1] に変換すると、整数の WCSP を実数の WCSP に帰着される。整数式 (2) と区別するために、同じ形の実数式を (2′) とする。

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{m}w_{ij}x_{iu}x_{jv}r_{ij}(u,v) \qquad (2)$$

但し、(2) では $x_{iu}\in 0,1$, (2′) では $x_{iu}\in[0,1]$
$\sum_{u=1}^{m}x_{iu}=1\ \ (i=1,...,n)$

(2′) について、以下の重要な定理が成立する。

**定理 1** 同じ WCSP に対して、(1),(2),(2′) の最大値は同じである。

**定理 2** (2′) の任意の解 P に対して、f(P)=f(IP) のような 0-1 整数解 IP が存在する。また、多項式時間オーダーで P により IP を求めることができる。

定理 1 と定理 2 を合わせて、次の WCSP の解法を考えられる。

1. WCSP を (2′) に変換する。
2. (2′) の任意の最適解 P（準最適解）を求める。
3. P により整数解 IP を求める。

(2′) の最適解を求めるために、非線形最適化の手法が使えるが、本稿では局所探索の手法を試みる。

### 3.2 局所探索

更に、(2′) を次のように書き換えることができる。

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{u=1}^{m}x_{iu}g_{iu}+I_i\right) \qquad (3)$$

$$g_{iu}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{v=1}^{m}w_{ij}x_{jv}r_{ij}(u,v) \qquad (4)$$

Weighted Constraint Satisfaction Problem Based on Local Search
Dongfeng Cai, Mitsuru Ishizuka
Dept. of Info. & Commun. Eng., Univ. of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113, JAPAN

但し、$I_i$は$x_{iu}(u=1,...,m)$を含まない。

$g_{iu}$は変数$x_{iu}$の support と呼ぶ。f を増加するためには、(3) によって$g_{iu^*}=max\{g_{i1},...,g_{im}\}$に対応する変数$x_{iu^*}$の値を増加すればよい。すべての$x_{iu^*}$が1になる場合、一つの整数の局所最大解を見つけたことが分かる。これによって、以下のアルゴリズムを提案する。

アルゴリズム（RLS）：

1. 初期設定：WCSP, k=1, step=0.2
   $x_{iu}=1/m$　(i=1,...n, u=1,...,m)
2. 終了判定：各変数値はもう変更しないと、終了。
3. 変数選択：i = k mod n
4. 値の選択：$u=g_{iu^*}$に対する$u^*$
5. 値の更新：$x_{iu}(k+1)=$

$$\begin{cases} 1 \quad (\ u=u^*\ and\ x_{iu}(k)+step\geq 1\ ) \\ x_{iu}(k)+step \quad (\ u=u^* and\ x_{iu}(k)+step<1\ ) \\ x_{iu}(k)\frac{1-x_{iu^*}(k+1)}{1-x_{iu^*}(k)} \quad (\ Otherwise\ ) \end{cases}$$

6. k=k+1, 2. に戻る。

この RLS 探索法は全ての整数解と同じ距離の平均初期値から、実数空間を通って整数解を探索する山登り法の一種である。パラメータ step の大きさに従って解の精度と計算量が違う。実験により、step は 0.2 前後にすればよい（図1）。

# 4 実験

## 4.1 実験方法

実験用の例題は全てランダムによって生成した。四つのパラメータ (n,m,p,q) がある。n,m はそれぞれ変数の数、変数の領域サイズ、p は変数間に制約が存在する確率、q は変数間に制約がある場合、任意の可能な値対が成立する確率である。ILS では、探索の初期値はランダムに生成し、変数と値の選択方法は最適優先の戦略を用いた。

## 4.2 実験結果

実験結果（図2）では、絶対多数の例題に対して、RLS のほうは ILS より良い或いは同じであり、全体として解の精度が改善された。解の精度が改善された一方で、RLS のほうは ILS より探索時間がかかった。

# 5 おわりに

本稿では、整数の WCSP を実数の最適化問題に帰着することによって、局所探索を用いた WCSP の解決法を提案した。今後の課題としては、更にこの方法の改善および新しい探索法の研究を行う事を考えている。

## 参考文献


1) 石塚 滿：「知識の表現と高速推論」、丸善株式会社、1992
2) Freuder E. : "Partial Constraint Satisfaction". In IJCAI89, pp278-283,(1989)
3) LAU H.C. : "A New Approach for Weighted Constraint Satisfaction: Theorietical and Computational Results". In CP96 Wrksp. pp.323-337(1996)
4) Meseguer P. and Larrosa J. : "Constraint Satisfaction as Global Optimization". In IJCAI95, pp.579-584(1995)
5) Larrosa J. and Meseger P. : "Optimization-based Heuristics for Maximal Constraint Satisfaction". In CP95, pp.103-120(1995)
6) Tsang E. : "Foundations of Constraint Satisfaction". Academin Press, 1993


| n=100, m=10, p=10, q=30 | | |
|---|---|---|
| step | Mean ratios | time(sec.) |
| 0.05 | 1.000 | 13.12 |
| 0.10 | 1.000 | 6.27 |
| 0.20 | 1.000 | 3.74 |
| 0.40 | 0.993 | 2.38 |
| 0.60 | 0.954 | 1.69 |
| 0.80 | 0.964 | 1.70 |
| 1.00 | 0.744 | 0.80 |

図 1

| n=50 m=10 | | Mean approximation ratios | |
|---|---|---|---|
| p(%) | q(%) | ILS | RLS |
| 8 | 10 | 0.916 | 1.000 |
| | 40 | 0.954 | 0.951 |
| | 70 | 1.000 | 1.000 |
| 15 | 10 | 1.000 | 1.000 |
| | 40 | 0.882 | 0.921 |
| | 70 | 0.997 | 0.997 |
| 68 | 10 | 1.000 | 1.000 |
| | 40 | 1.000 | 1.000 |
| | 70 | 0.934 | 0.990 |

図 2