4Ｔ－５

確率的探索手法を用いた集合間の合理的な対応写像探索

甲元　洋[+]　　岡部　洋一[++]
＋ 日立製作所　日立工場　＋＋ 東京大学先端科学技術研究センター

１．はじめに

帰納法を有する問題、たとえば無限級数の恒等式証明では、その両辺の間に存在する帰納的手続きを予め仮説として知る必要がある。その為には、第１ステップとして、両辺の対応写像を探索し、第２ステップとして対応写像を記号化しなければならない。

我々は、２つの集合間に、帰納的手続きが存在する場合に、適切な制約条件を課すことで、合理的な対応写像が、比較的効率的に確率的探索可能ではないかと考えた。

そこで、本研究では、第１ステップに相当するものとして、形式的べき級数の恒等式両辺に成立する合理的な対応写像の探索を、例題として取り上げた。本稿では、その試行結果について報告する。

２．対応写像の確率的探索

最初に問題を一般的に定式化しておく。値域をＡ＝ $\{x_{A,i}\}$ 、定義域をＢ＝ $\{x_{B,j}\}$ とし、$X_A={}^t(x_{A,0},\cdots,x_{A,i},\cdots)$

$X_B={}^t(x_{B,0},\cdots,x_{B,j},\cdots)$ とする。

ここで、 $x_{A,i}$、$x_{B,j}$ は一般には、無限次元のベクトルである。求めたい写像は行列 $V(i,j)$ であり次式を満たす。

$$V(i,j)\ X_B = X_A \qquad \cdots \quad (1)$$

行列要素 $V(i,j)$ は以下を満たすものとする。すなわち、

$V(i,j)=1$　　$x_{B,j}$ が $x_{A,i}$ の構成要素
$V(i,j)=0$　　$x_{B,j}$ が $x_{A,i}$ の非構成要素
$\cdots$ (2)

実際の探索は、有限次元のベクトルデータ X_A'' ならびに X_B'' によって、有限次元行列 $V''(i,j)$ を求めるように定式化される。例題とする形式的べき級数の恒等式を次式に示す。

$$A(x)=\underset{x_{A,0}}{1}+\underset{x_{A,1}}{\frac{x^2}{1-x^2}}+\underset{x_{A,2}}{\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^4)}}+\underset{x_{A,3}}{\frac{x^{12}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}}+\cdots$$

$$\begin{aligned}B(x)&=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots\\&=\underset{x_{B,0}}{1}+\underset{x_{B,1}}{x^2}+\underset{x_{B,2}}{x^4}+\underset{x_{B,3}}{x^2\cdot x^4}+\underset{x_{B,4}}{x^6}+\underset{x_{B,5}}{x^2\cdot x^6}+\cdots\end{aligned} \qquad \cdots (3)$$

確率的探索手法としては、シミュレーテッドアニーリング（以下ＳＡと略す）に同等なアルゴリズムを採用する。系のエネルギーは、次式に示す様に３項から構成される。

ｕ＝ｕ１＋ｕ２＋ｕ３
　ｕ１＝ｂ＊(べき級数間のｴﾈﾙｷﾞｰ)
　ｕ２＝ｇ＊(写像の束縛ｴﾈﾙｷﾞｰ)
　ｕ３＝ｔ＊(記述長の束縛ｴﾈﾙｷﾞｰ)
$\cdots$ (4)

ここで、b, t, g は調整パラメータである。

第１項のべき級数間のエネルギーは、（限定された）形式的べき級数の集合に導入される対数的な距離として定義される。第２項の写像の束縛エネルギーは、 $x_{B,j}$ から $x_{A,i}$ への写像が一価関数となることの制約条件である。第１項と第２項を合わせて、全単射すなわちいかなる $x_{B,j}$ も $x_{A,i}$ の中のいずれかの要素すべてに対応することの制約条件となる。第３項は、今後対応写像の再帰的手続き（記号）探索を進めるにあたり、記述長をなるべく小さくするための制約条件である。今回の試行計算においては、同じ $x_{A,i}$ に対応付けられる $x_{B,j}$ 同志は、同程度の記述量であるという暫定的な制約条件を用いた。

Probabilistic search of reasonable mapping between given sets

+ Hiroshi Kohmoto, Hitachi,Ltd. Hitachi Works, 3-1-1 Saiwai,Hitachi,Ibaraki 317,Japan
++ Youichi Okabe, Research Center for Advanced Science and Technology,The University of Tokyo 4-6-1 Komaba,Meguro,Tokyo 153,Japan

3．試行結果

$x_{A,i}$ を４項、$x_{B,j}$ を６４項、および $x_{A,i}$, $x_{B,j}$ ともに１１次元のベクトル表現 $U_{i,k}$（各ベキ乗項 x^{2k} の係数が、k 次のベクトル成分に対応）とした場合について試行計算を行った。

ＳＡの冷却スケジュールは、time を時間(探索ループの演算回数)とした時、温度変化が 1+C*time に反比例するよう定義した。初期温度は 100、最終温度は 0.1、C=0.1、b ＝10^8、g ＝30、t ＝500 と設定した。

表-1 に計算結果例を示す。１-a には V(i, j)の目標パターンを、1-b には V(i, j)の計算結果を示す。また、1-c には目標式の V(i, j)に基づいたべき級数 $x_{A,i}$ を、1-d には/計算結果の V(i, j)に基づいたべき級数 $x_{A,i}$ 示す。生成された写像の一致率は、良い場合で約９０％程度である。

表－１　対応写像の探索結果

1-a　V(i, j)目標パターン

```
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0
```

1-b V(i, j)計算結果(一致率＝90.6%)

```
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0
```

1-c XA, i の目標式

(10000000000)=1

(01111111111)$=x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+\cdots$

(00011223344)$=x^6+x^8+2x^{10}+2x^{12}+3x^{14}+\cdots$

(00000011234)$=x^{12}+x^{14}+2x^{16}+3x^{18}+4x^{20}$

1-d XA, i の計算結果(一致率＝87.5%)

(10000000000)=1

(01111111000)$=x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}$

(00011222221)$=x^6+x^8+2x^{10}+2x^{12}+2x^{14}+\cdots$

(00000011233)$=x^{12}+x^{14}+2x^{16}+3x^{18}+3x^{20}$

4．考　察

本計算結果例ならびに関連した計算結果から、次の様な特徴が見出された。

(1)計算されたべき級数の高次項は、目標のべき級数の高次項に一致しない。

(2)乱数のシードを変えることにより、たとえば $x_{A,2}$ と $x_{A,3}$ が入れ替わった様なケースが生じた。入れ替わった場合には、V(i, j)の一致率は 70%程度まで低下する。

第１の事象の理由としては、高次項の打ち切りの影響と、ＳＡにおける非平衡状態への凍結が挙げられる。対策として、高次項の逐次反映ならびに準安定領域を不安定にさせるようなパラメータの調整を、動的に行うことを検討する。

第２の事象は、複数の準安定領域が競合した結果と捉えることができる。特に、記述長の束縛エネルギーであるｕ３として今回採用した条件が弱いため、入れ替わりを防ぐ役割を果たしていないものと考えられる。

6．結　　論

確率的探索手法としてシミュレーテッドアニーリングと同等な、ベキ級数間の対応写像の探索アルゴリズムを構成し、その試行計算を行った。その結果、低次項について一致した対応写像の導出例を確認した。

本アルゴリズムは、有限個の項が帰納的手続きによる対応写像に一致するという意味で、合理的な対応写像を探索する能力を有すると言える。

7．今後の課題

今後､同アルゴリズムの調整を継続し、確実な探索法を検討する。同時に探索の効率を正確に評価することを課題とする。将来的には、第２ステップとして、対応写像の探索と、記号化された帰納的手続きの探索アルゴリズムを融合することを試みる。

8．参考文献

1)Robert S.Boyer, J Strother Moore：A Computational Logic Handbook (1988)

2)後藤滋樹：記号処理ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾐﾝｸﾞ､岩波講座ｿﾌﾄｳｴｱ科学８ (1988)

3)藤田博､金森直：帰納法を用いる定理証明ｼｽﾃﾑ､人工知能学界誌 vol.5　No.1 (1990)

4)久保幹男：ﾒﾀﾋｭｰﾘｽﾃｨｯｸｽ､離散構造とｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ (1995)

5)甲元洋、岡部洋一：確率的探索手法と記号処理、第 38 回ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾐﾝｸﾞ･ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ報告集 (1997)