3J−9

3次元圧縮性流体解析に現れるブロック5重対角行列群に対するベクトル計算機向けの解法について*

伊藤　祥司†　張　紹良‡　名取　亮‡
筑波大学大学院理工学研究科†　筑波大学電子情報工学系‡

1　はじめに

3次元圧縮性流体を記述するナビエ・ストークス方程式を解く際，4次精度AF法 (Approximate Factorization method) を用いて数値計算を行うと，計算空間の3方向(i,j,k)においてブロック5重対角行列群が現れ（文献[1]），その行列群$\hat{A}_{j,k}$（iは行方向をなす）を係数行列とする連立一次方程式

$$\hat{A}_{j,k}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{1}$$

を解くことに帰着される．ベクトル計算機で解く場合，これら行列群に対して1つの方向にLU分解し，他の方向にはベクトル化して同時に解くことで計算の効率化を図ることができる．しかし，ベクトル計算機の性能を十分に発揮させる観点からは，従来のLU分解法には改善の余地がある．

本研究では，従来のLU分解法の計算過程に着目し，行列群$\hat{A}_{j,k}$に対し両端よりLU分解を同時に行い，ベクトル計算機での計算効率を向上させる解法を提案する．また，従来のLU分解法との性能比較実験を行った結果も示す．

2　係数行列の構造的特徴

上述した行列群$\hat{A}_{j,k}$は以下の通りである．

$$\hat{A}_{j,k}=\begin{bmatrix} C^1_{j,k} & D^1_{j,k} & E^1_{j,k} & & & & & \\ B^2_{j,k} & C^2_{j,k} & D^2_{j,k} & E^2_{j,k} & & & & \\ A^3_{j,k} & B^3_{j,k} & C^3_{j,k} & D^3_{j,k} & E^3_{j,k} & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & A^{l-1}_{j,k} & B^{l-1}_{j,k} & C^{l-1}_{j,k} & D^{l-1}_{j,k} & \\ & & & & A^l_{j,k} & B^l_{j,k} & C^l_{j,k} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$A^i_{j,k}, B^i_{j,k}, C^i_{j,k}, D^i_{j,k}, E^i_{j,k} (i=1\sim l, j=1\sim m, k=1\sim n)$は，それぞれ5×5小行列である．

3　従来のLU分解法

従来のLU分解法では，$\hat{A}_{j,k}$は式(3)のように分解される．ここで，Iは単位行列を表す．ベクトル計算機を用いる場合，ベクトル長（同時にLU分解できる要素数）は，j方向をベクトル化するならばm，k方向をベクトル化するならばnである．式(3)の上線付き小行列は，分解により更新された小行列を表す．

$$\begin{bmatrix} C^1_{j,k} & & & & & & \\ B^2_{j,k} & \bar{C}^2_{j,k} & & & & & \\ A^3_{j,k} & \bar{B}^3_{j,k} & \bar{C}^3_{j,k} & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & A^{l-1}_{j,k} & \bar{B}^{l-1}_{j,k} & \bar{C}^{l-1}_{j,k} & \\ & & & & A^l_{j,k} & \bar{B}^l_{j,k} & \bar{C}^l_{j,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \bar{D}^1_{j,k} & \bar{E}^1_{j,k} & & & & \\ & I & \bar{D}^2_{j,k} & \bar{E}^2_{j,k} & & & \\ & & I & \bar{D}^3_{j,k} & \bar{E}^3_{j,k} & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & I & \bar{D}^{l-1}_{j,k} \\ & & & & & & I \end{bmatrix} \tag{3}$$

*A new method for block pentadiagonal linear systems on vector processor.

†Shoji ITOH: Master's Program in Science and Engineering at University of Tsukuba
‡Shao-Liang ZHANG: Institute of Information Sciences and Electronics at University of Tsukuba
‡Makoto NATORI: Institute of Information Sciences and Electronics at University of Tsukuba

4 Twisted LU 分解法

一方で，行列群の対角方向の両端（i成分の両端）から中心の要素まで同時に分解し，そこで折り返して後退代入することができる [2]．このとき，$\hat{A}_{j,k}$ は式 (4) のように分解できる．この分解法では，分解途中の構造的特徴から名付けられた，"twisted factorization（ツイスト分解）[3]"が行われる．文献 [3] では，ツイスト分解は単一の連立方程式に対して CG 法等の反復解法の前処理の並列化に使用されている．

本研究では，この分解法を複数の連立方程式を解くための直接法（LU分解法）に応用し，ベクトル計算機の計算性能を改善するようなアルゴリズム（本研究の中では，*Twisted LU*分解法と呼ぶ）へと更に改良した．

ベクトル計算機を用いて問題を解く場合，ベクトル長を十分に長くすると計算機性能を引き出すことができる．このベクトル計算機の一般的なアーキテクチャ特性を念頭に，式 (4) の LU分解を，i方向の要素を二分割し後半の要素をベクトル化方向の要素へ組込み，ベクトル長を倍増させた．

$$
\begin{bmatrix}
C^1_{j,k} & & & & & & \\
B^2_{j,k} & \bar{C}^2_{j,k} & & & & & \\
A^3_{j,k} & \bar{B}^3_{j,k} & \bar{C}^3_{j,k} & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & A^{\frac{1}{2}+1}_{j,k} & \bar{B}^{\frac{1}{2}+1}_{j,k} & \bar{C}^{\frac{1}{2}+1}_{j,k} & \bar{D}^{\frac{1}{2}+1}_{j,k} & E^{\frac{1}{2}+1}_{j,k} & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & & \bar{C}^{l-1}_{j,k} & D^{l-1}_{j,k} \\
 & & & & & & C^l_{j,k}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I & \bar{D}^1_{j,k} & \bar{E}^1_{j,k} & & & & \\
 & I & \bar{D}^2_{j,k} & \bar{E}^2_{j,k} & & & \\
 & & I & \bar{D}^3_{j,k} & \bar{E}^3_{j,k} & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & \bar{A}^{l-1}_{j,k} & \bar{B}^{l-1}_{j,k} & I & \\
 & & & & \bar{A}^l_{j,k} & \bar{B}^l_{j,k} & I
\end{bmatrix}
\tag{4}
$$

5 数値実験

数値実験では，富士通 VPP500 の 1PE（ピーク性能 1.6Gflops）を用いて数通りの実験を行った．従来の LU 分解法に比べて *Twisted LU*分解法では，最高 30% 時間短縮した．

実際の実験結果の詳細については，講演当日に紹介する．

6 まとめ

ブロック重対角行列群を係数行列とするシステムに対しては，*Twisted LU* は従来の LU分解法と比較して，ベクトル計算機の性能を更に引き出すアルゴリズムであると言える．流体の問題に限らず他の問題についても，同様の行列群に対してベクトル計算機で解く場合は，*Twisted LU* 分解法を用いることを提案する．

参考文献

[1] T.H.Pulliam: Euler and Thin layer Navier-Stokes Codes:ARC2D,ARC3D,*Notes for COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS USER'S WORKSHOP* (1984)15.1-15.84

[2] H.A.Van der Vorst: Analysis of a parallel solution method for tridiagonal linear systems,*Parallel Computer* 5,(1987)303-311

[3] H.A.Van der Vorst: Large tridiagonal and block tridiagonal linear systems on vector and parallel computers,*Parallel Computer* 5,(1987)45-54