並列区間最適化

1Ｊ−2

藤井康雄　市田浩三
（京都大学 情報処理教育センター）　（京都産業大学 経営学部）

1．はじめに

我々は，区間解析を利用した最適化問題[1]，多目的最適化問題[2]の他に，並列計算機上において区間解析を利用した多峰性多変数関数の大域的最適解を求めるアルゴリズムを検討してきた[3]．並列計算機上では PVM(Parallel Virtual Machine)[4]を利用してプログラムを行う．これは，マスター側で変数の初期領域を分割し(初期区間)，個々のスレーブ側でタスクを生成後，通信により初期区間を与えて実施する方法である．ここでは，従来の分割領域の関数値比較法に区間 Newton 法を採り入れ，各スレーブでの評価時間の短縮を試みた結果について報告する．

2．区間解析を用いた関数の最大値探索

区間解析を利用した大域的最適化のアルゴリズムとして多峰性多変数関数 $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ の初期領域 $a_i \le x_i \le b_i; (i = 1, 2, ..., k)$ における最大値探索を以下のステップで実現する．

ステップ１：マスター側で各変数の定義域を区間とし，スレーブ数に分割し送信する．このときマスターでの定義域の１点を用いた関数値を f_{max} として併せて送る．

ステップ２：スレーブ側で初期区間を分割し，各部分領域における区間関数値を F_a, F_b とする．

ステップ３：f_{max}, F_a, F_b の比較を行い，最大値を含む可能性のない領域を消去し，f_{max} を更新する．終了判定条件が満たされればマスターへ通知する．そうでなければ，次のステップへ進む．

ステップ４：残存領域群から１つの領域を取り出し，$|J| = detJ(\mathbf{X})$ を求める．

ステップ５：もし $0 \in |J|$ なら，区間 Newton 法を適用し，指定した範囲に収束すれば解として保存し必要なら，f_{max} を置きかえる．

ステップ６：$0 \in |J|$ の場合，さらに分割する．

ステップ７：残存領域から関数値の上限が最大の部分領域の部分領域を分割し，ステップ２へ戻り繰り返す．

ここで，ステップ４〜６での区間 Newton 法は，扱う目的関数が２回連続微分可能であれば適用できるが，そうでない場合には，変数定義域の分割を行うステップのみを適用することになる．また制約条件の付いた目的関数では，ラグランジュ乗数法を導入して，その鞍点を求める問題として評価する．

3．PVM での並列処理時の検討事項

Parallel Interval Optimization.

Yasuo FUJII *,　Kozo ICHIDA**.

*)Educational Center for Information Processing, Kyoto University, Kyoto 606-01.

**)Faculty of Business Administration, Kyoto Sangyo University, Kamigamo, Kyoto 603.

我々は8 CPUの並列計算機でPVMを使い1台のマスターと7台のスレーブとして構成し，マスターからスレーブへのタスクの生成は，マスターのpvm関数の実行によって行い，変数定義域である初期区間の送信も同様な関数によって行う．

アルゴリズムの検討には，

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 1.05x_1^4 - (1/4)x_1^6 - x_1x_2 - x_2^2 \qquad (1)$$

の3-Hump Camel-Back関数の最大値を，$-5 \le x_1 \le 5, -4 \le x_2 \le 4$ の定義域で探索した．
この定義域内で最大値は，$x_1 = x_2 = 0.0, f(\mathbf{x}) = 0.0$ であり，

$x_1 = 1.7475523..., x_2 = -0.8737761...$ のとき，$f(\mathbf{x}) = -0.2986384...$

の極大値が原点対称に存在している．

なお，各スレーブでは変数の初期区間が異なる問題を評価することになるので，領域分割のアルゴリズムだけが適用されたケースでは例えば以下のような残存領域数／分割回数となる．

ｽﾚｰﾌﾞNo.	1	2	3	4	5	6	7
残存領域数	19,998	19,998	19,998	13	19,998	19,998	19,998
分割回数	74,399	50,328	28,106	1,114	28,106	50,328	74,399

このため，f_{max} の値をできるだけ更新してスレーブNo.4以外での演算時間を短縮することが有効となる．また，更に目的関数の変数が増加した場合で，区間Newton法の適用では，行列演算が必要となるが，ループアンローリングを行い，ソフトウェアパイプラインを有効に働かせることも考慮しなくてはならない．

4．おわりに

我々はこれまでに，関数の最適化問題に区間解析の手法を用いて高精度の最適解を得てきたが，変数が増加すると関数評価に要する時間が掛かり困難となってきていた．従って，並列アルゴリズムは有効な解決法と考えている．本数値実験は，区間演算向きの最適なアルゴリズムの一方法を検討したにすぎない．従って，さらに並列アルゴリズムの検討と，多変数の場合についての数値実験を，より多数のCPUを持つ並列計算機上で行いたい．

参考文献

[1]Y. Fujii and K. Ichida: Maximization of multivariable functions using interval analysis, Interval Mathematics 1985 (K.Nickel, ed), Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Sciences.212,pp.17-26 (1986).

[2]K. Ichida and Y. Fujii: Multicriterion optimization using interval analysis, Computing,44,pp. 47-57 (1990).

[3]藤井,市田: 大域的最適化問題に対する区間法の並列計算:第５２回情報処理学会全国大会講演論文集 1U-09 (1996).

[4]A.Geist and J.Dongara(村田英明訳): PVM User's guide and reference manual, 1995.2.