部分 k-木に対する $[g, f]$-辺彩色アルゴリズム[1]

4E－5

布施 一樹　周 暁　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研究科

1. はじめに

本文では部分 k-木と呼ばれるグラフのクラスを扱う．部分 k-木は木の一般化であり，普通の木は部分 1-木である．部分 k-木に対する普通の辺彩色，及び f-辺彩色は線形時間で求めることができることが知られている [3]．fを Vから自然数への任意の関数，gを Vから 0 以上の整数への任意の関数とする．ただし，グラフの各点 vにおいて $g(v) \leq f(v)$ で，g，fはグラフと一緒に与えられる．グラフ G の $[g, f]$-辺彩色とは，任意の点 $v \in V$に接続する同じ色の付いた辺の数が $g(v)$ 本以上 $f(v)$ 本以下となるように G のすべての辺に色を付けることである．この部分 k-木に対して $[g, f]$-辺彩色する多項式時間アルゴリズムを与える．

2. 準備

本節では定義をいくつか与える．本文では自己ループのない単純グラフ $G = (V, E)$ を扱う．ここで Vは点の集合，Eは辺の集合である．(u, v) は点 u，vを両端点とする辺である．$d(v)$ は点 $v \in V$の次数であり，$\Delta(G)$ は G の最大次数である．

定義 1 与えられたグラフ G のすべての点 vに対し，$f_{max} = \max_{v \in V} f(v)$ と定義する．

G の任意の $[g, f]$-辺彩色問題を解くような色の集合 $C = \{1, 2, \cdots, |C|\}$ について $\max_{v \in V} \lceil d(v)/f(v) \rceil \leq |C| \leq \min\{\min_{v \in V} \lfloor d(v)/g(v) \rfloor, \Delta + 1\}$ である．

定義 2 k-木は以下のように再帰的に定義される．

(1) k点からなる完全グラフは k-木である．

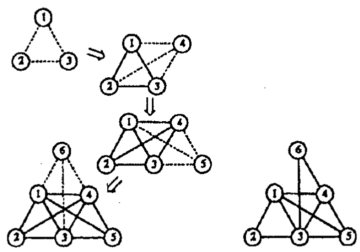
(2) グラフ $G = (V, E)$ が k-木であり，G の k点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$は完全グラフを誘導するとする．このとき新しい点 wと k本の辺 (v_i, w)，$1 \leq i \leq k$，を G に付け加えて得られたグラフ $H = (V \cup \{w\}, E \cup \{(v_i, w) | 1 \leq i \leq k\})$ も k-木である．

(3) k-木とは **(1)** から **(2)** を繰り返し適用して得られたグラフである．

定義 3 部分 k-木とは k-木の部分グラフである．

定義 4 グラフ $G = (V, E)$ の分解木とは以下の **(1)**-**(3)** の条件を満たす木 $T = (V_T, E_T)$ である．ここで，V_Tは Vの部分集合族である．

(1) グラフ Gの点は木 Tの少なくとも 1 つの節点 $X_i \in V_T$に属している．



(a)　(b)

図 1: (a)3-木と (b) 部分 3-木

(2) G の各辺 $e = (v, w) \in E$に対し，$v, w \in X_i$なる木 Tの節点 $X_i \in V_T$がある．

(3) 全ての節点 $X_i, X_j, X_l \in V_T$に対して，もし X_iから X_lへの T上の道に X_jがあれば，$X_i \cap X_l \subseteq X_j$である．

分解木の幅とは $\max_{X \in V_T} |X| - 1$ である．グラフ G の幅とは全ての分解木の幅のうち最小の幅である．グラフ G が部分 k-木である必要十分条件は G の幅が k以下ということである．Bodleander は次の定理を証明した [2]．

定理 1 kが定数ならば，部分 k-木の幅 kの分解木は線形時間で求められる．

分解木 Tの任意の節点 X_rを選び，Tを X_rを根とする根付き木であるとみなす．各辺 $e = (v, w) \in E$に対して $v, w \in X_i$なる分解木 Tの 1 つの節点 $X_i \in V_T$を選び，$rep(e) = i$ と定義する．Tの各節点 X_iについて $E(X_i) = \{e \in E | rep(e) = j,$ 節点 $X_i \in V_T$を根とした Tの部分木に $X_j \in V_T$が入っている $\}$ と定義する．辺集合 $E(X_i)$ により誘導される G の部分グラフを $G[X_i]$ と書く．

図 2のように木の変形を各内点に対して行うことにより，次のような性質をもつ新たな 2 進分解木を得ることができる．

- 分解木の点数は $O(n)$．ここで，n はグラフ G の点数である．
- 各内点 X_iは必ず 2 つの子 (例えば X_l, X_r) を持ち，$X_i = X_l$あるいは $X_i = X_l$である．

[1] A Polynomial algorithm for finding $[g, f]$-colorings of partial k-trees
Kazuki Fuse , Xiao Zhou and Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

- 各辺 $e=(v,w)$ に対し，v，$w \in X_i$ なる葉 $X_i \in V_T$ が少なくとも 1 つ T にある．

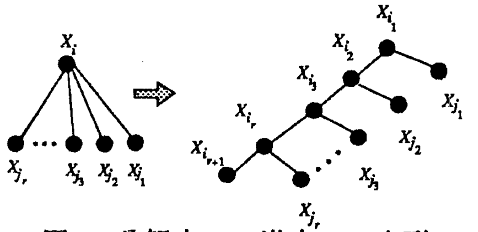


図 2: 分解木の 2 進木への変形

分解木が既に求まっているとき，その分解木から 2 進分解木は線形時間で求めることができる．今後，分解木といったら変形後の 2 進分解木をいうものとする．

3. 逐次アルゴリズム

$[g,f]$-辺彩色問題を考える．$C=\{1,2,\cdots,|C|\}$ とする．部分 k-木 $G=(V,E)$ について，写像 $\varphi : E \rightarrow C$ を全体 $[g,f]$-辺彩色という．分解木の内点を X_i とする．写像 $\varphi : E(X_i) \rightarrow C$ を部分 $[g,f]$-辺彩色という．G の全体または部分 $[g,f]$-辺彩色 φ で，点 v に接続する色 c の付いた辺数を $n_\varphi(v,c)$ とする．全ての点 $v \in V$ とすべての色 c に対して，$g(v) \leq n_\varphi(v,c) \leq f(v)$ ならば，全体 $[g,f]$-辺彩色 φ は正しいという．全ての点 $v \in V(G[X_i])$ と全ての色 c に対して，$v \in V(G[X_i]) - X_i$ ならば $g(v) \leq n_\varphi(v,c) \leq f(v)$，$v \in X_i$ ならば $n_\varphi(v,c) \leq f(v)$ であるとき，部分 $[g,f]$-辺彩色 $\varphi : E(X_i) \rightarrow C$ は正しいという．ある部分 $[g,f]$-辺彩色が正しい全体 $[g,f]$-辺彩色まで拡張できるとき，その部分 $[g,f]$-辺彩色は拡張可能であるという．X_i での部分 $[g,f]$-辺彩色のカラーベクトルというものを次のように定義する．

定義 5 カラーベクトル $C(X_i)$ とは，$X_i \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$ の部分集合からなる $|C|$ 次元のベクトルである．すなわち，$C(X_i)=(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\cdots,\mathcal{R}_{|C|})$．ただし，$\mathcal{R}_c \subseteq X_i \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$．

$G[X_i]$ のある部分 $[g,f]$-辺彩色 φ のカラーベクトル $C_\varphi(X_i)$ とは次のことを満たすものである．全ての色 c に対し，$\mathcal{R}_c=\{(v,\alpha)|$ 各点 $v \in X_i$ に対し，$n_\varphi(v,c)=\alpha, 0 \leq \alpha \leq f(v)\}$ また，φ が正しいとき，そのカラーベクトルは *active* であるといい，さらに φ が拡張可能であるとき，そのカラーベクトルは正しいという．

補題 1 $G[X_i]$ の 2 つの部分 $[g,f]$-辺彩色 φ，ψ に対して $C_\varphi(X_i)=C_\psi(X_i)$ とする．このとき，φ が正しい必要十分条件は ψ が正しいことである．

補題 2 $G[X_i]$ の 2 つの *active* なカラーベクトル

$$\begin{aligned} C(X_i) &= (\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\cdots,\mathcal{R}_{|C|}), \\ C'(X_i) &= (\mathcal{R}'_1,\mathcal{R}'_2,\cdots,\mathcal{R}'_{|C|}) \end{aligned}$$

が与えられ，全ての $\mathcal{R} \subseteq X_i \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$ に対して，$|\{c \in C|\mathcal{R}=\mathcal{R}_c\}|=|\{c \in C|\mathcal{R}=\mathcal{R}'_c\}|$ とする．そのとき，$C(X_i)$ が正しい必要十分条件は $C'(X_i)$ が正しいことである．

上の補題より，X_i での同値類を特徴付ける関数を次のように定義する．

定義 6 写像 $\rho : 2^{X_i \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}} \rightarrow \{0,1,\cdots,|C|\}$ を *count* という．*active* なカラーベクトルを $C(X_i)=(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2,\cdots,\mathcal{R}_{|C|})$ とすると，全ての $\mathcal{R} \subseteq X_i \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$ に対して，$\rho(\mathcal{R})=|\{c \in C|\mathcal{R}=\mathcal{R}_c\}|$ ならば，*active-count* という．

部分グラフ $G[X_i]$ に限定した全体または部分 $[g,f]$-辺彩色 φ を $\varphi|_{G[X_i]}$ と書く．

定義 7 内点 X_i の子を $X_l=X_i, X_r$ とする．写像 $pc : 2^{X_l \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}} \times 2^{X_r \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}} \rightarrow \{0,1,\cdots,|C|\}$ を *pair-count* という．全ての $\mathcal{S} \subseteq X_l \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$，$\mathcal{T} \subseteq X_r \times \{0,1,\cdots,f_{max}\}$ に対して，$pc(\mathcal{S},\mathcal{T})=|\{c \in C|\mathcal{S}=\mathcal{R}^l_c \wedge \mathcal{T}=\mathcal{R}^r_c\}|$ であるとき，pc は *active* であるという．ただし，$G[X_i]$ の正しい部分 $[g,f]$-辺彩色を φ としたとき，$\varphi|_{G[X_l]}$ のカラーベクトルを $C(X_l)=(\mathcal{R}^l_1,\mathcal{R}^l_2,\cdots,\mathcal{R}^l_{|C|})$，$\varphi|_{G[X_r]}$ のカラーベクトルを $C(X_r)=(\mathcal{R}^r_1,\mathcal{R}^r_2,\cdots,\mathcal{R}^r_{|C|})$ とする．

T の各節点 X_i について，全ての *active-count* は高々 $|C|^{2^{(k+1)(f_{max}+1)}}$ 個である．

各葉 X_i での全ての *active-count* は，全ての部分辺彩色 $E(X_i) \rightarrow \{1,2,\cdots,\min\{|E(X_i)|,|C|\}\}$ より，$O(|E(X_i)|^{|E(X_i)|})=O((\frac{k(k+1)}{2})^{\frac{k(k+1)}{2}})$ 時間すなわち定数時間で求められる．T の各内点 X_i について，全ての *active* な *pair-count* は高々 $|C|^{2^{2(k+1)(f_{max}+1)}}$ 個である．各内点 X_i の子を $X_l=X_i$，X_r とすると，X_l，X_r の全ての *active-count* より X_i の全ての *active* な *pair-count* を $O(|C|^{2^{2(k+1)(f_{max}+1)}})$ で判定できる．さらに，X_i の全ての *active* な *pair-count* から X_i の全ての *active-count* を $O(|C|^{2^{2(k+1)(f_{max}+1)}})$ 時間で求められる．

$O(|C|)=O(n)$，また分解木の節点数は $O(n)$ であることから，以下の定理が成り立つ．

定理 2 部分 k-木に対しては $[g,f]$-辺彩色問題の最適解を多項式時間で求めることができる．ここで k は定数である．

参考文献

[1] H. L. Bodleander. Polynomial algorithms for graph isomorphism and chromatic index on partial k-trees. *Journal of Algorithms*, 11(4):631-643, 1990.

[2] H. L. Bodleander. A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. In *Proc. of the 25th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*,pp.226-234,San Diego,CA,1993.

[3] X.Zhou and T.Nishizeki. Algorithms for Finding f-Colorings of Partial k-Trees. In *Proc. of the Sixth International Symposium on Algorithms and Computation , Lect. Notes in Computer Science, Springer-Verlag*,volume 1004, pp.332-341,1995.