連続する値が禁止された占有問題の漸化式

緑川 章一[†] 友田 敏章[†]
堀端 孝俊[†] 村岡 光男[†]

n 次の置換 $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{pmatrix}$ において，a_i は i から始まる連続した k 個の値はとれないものとする ($a_i \neq i$, $a_i \neq i+1, \cdots, a_i \neq i+k-1$, ただし $n+1 \equiv 1$, $n+2 \equiv 2, \cdots, n+k-1 \equiv k-1$). このような置換の総数は，包含と排除の原理を用いて $U_k^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r c_r^{(n)}(n-r)!$ と表すことができるが，我々は $k=3$ と 4 の場合に $c_r^{(n)}$ の満たすべき漸化式を導き，その解として $c_r^{(n)}$ の関数形を完全に決定できることを示す．

Recurrence Relations for Counting the Number of Permutations with Forbidden Succesive Numbers

Shoichi Midorikawa,[†] Toshiaki Tomoda,[†] Takatoshi Horibata[†] and Mitsuo Muraoka[†]

We consider the problem of counting the total number of permutations of the nth order, $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{pmatrix}$, with the constraints that a_i is forbidden to take k succesive numbers beginning from $i (a_i \neq i,\ a_i \neq i+1,\ \cdots,\ a_i \neq i+k-1$, where $n+1 \equiv 1,\ n+2 \equiv 2,\ \cdots,\ n+k-1 \equiv k-1)$. Using the principle of inclusion and exclusion, the number of such permutations is expressed as $U_k^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r c_r^{(n)}(n-r)!$. We derive recurrence relations which are satisfied by the numbers $c_r^{(n)}$ in the case of $k=3$ and 4, and show that the functional forms of $c_r^{(n)}$ are fully determined as the solutions of these recurrence relations.

1. まえがき

拘束付きの置換の総数を求める問題を考えよう．n 次の置換

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{pmatrix}$$

において，a_i は i から始まる連続した k 個の値をとれないものとする．条件を具体的に記すと，

$$\begin{array}{llll}
a_1 \neq 1, & a_1 \neq 2, & \dots, & a_1 \neq k\\
a_2 \neq 2, & a_2 \neq 3, & \dots, & a_2 \neq k+1\\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{n-1} \neq n-1, & a_{n-1} \neq n, & \dots, & a_{n-1} \neq k-2\\
a_n \neq n, & a_n \neq 1, & \dots, & a_n \neq k-1
\end{array}$$

となる☆．

これらの問題を解く一般的な方法とは，包含と排除の原理を用いるものである．それによれば，$a_i\ (i=1,2,\dots,n)$ が k 個の値をとることができない場合の置換の総数 $U_n^{(k)}$ は，

$$U_k^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r c_r^{(n)} (n-r)! \qquad (1)$$

と表すことができる．ここで，係数 $c_r^{(n)}$ は，$k=1$ の場合は L. Euler によって，$k=2$ の場合は Kaplansky によって

$$c_r^{(n)} = \binom{n}{r} \qquad (k=1 \text{ の場合})$$

$$c_r^{(n)} = \frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r} \qquad (k=2 \text{ の場合})$$

と求められた[1),2)]．しかし，それらの導出方法は問題

† 青森大学工学部
Faculty of Engineering, Aomori University

☆ 2 つの点集合 $V=\{v_i \mid i=1,2,\dots,n\}$, $W=\{w_i \mid i=1,2,\dots,n\}$ を考え，置換 P に対して v_i と w_{a_i} を結ぶ辺 $(i=1,2,\dots,n)$ から成る 1-正則 2 部グラフを対応させると，この問題は，そのようなグラフの総数を拘束条件付きで求める問題と言い換えることもできる．

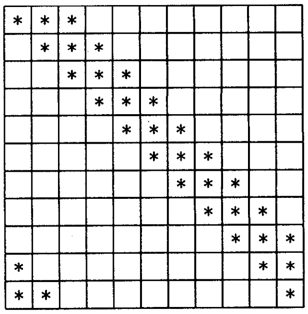


図1 $k=3$ の場合における占有問題の視覚的表現

Fig. 1 Visual representation of the occupation problem in the case of $k=3$.

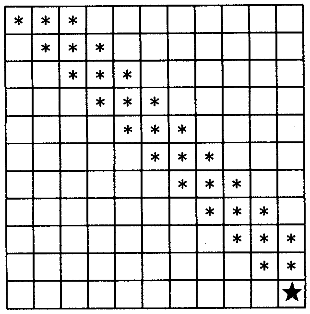


図2 $d_r^{(n)}$ を求めるための枡と $*$

Fig. 2 Cells and $*$'s to evaluate $d_r^{(n)}$.

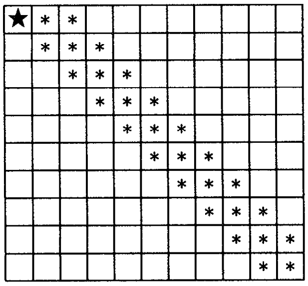


図3 $M_r^{(n-1)\times n}$ を求めるための枡と $*$

Fig. 3 Cells and $*$'s to evaluate $M_r^{(n-1)\times n}$.

の特殊性を巧みに利用したものであって k が3以上の場合に拡張するのは不可能であった．

前回の論文[3]で我々は，$k=3$ の場合に $c_r^{(n)}$ の値を直接に数え上げることによって，それらの関数形を推定することができた．この結果は，その背後にある規則の存在を強く示唆している．この論文では，k が3と4の場合に $c_r^{(n)}$ の満たすべき漸化式を導き，その解として $c_r^{(n)}$ の関数形を完全に決定できることを示そう．

2. $k=3$ における $c_r^{(n)}$ の漸化式

2.1 $c_r^{(n)}$ の漸化式とその成立条件

$k=3$ の場合における $U_3^{(n)}$ の値を得るためには，$c_r^{(n)}$ が求まればよい．$c_r^{(n)}$ の意味するところを視覚的に表現すると，**図1** のように n^2 個の枡の中におかれた $3n$ 個の $*$ から r 個を同一の行および列には並ばないように取り出す方法の数である[2]．

まず最初に，$c_r^{(n)}$ の漸化式を直接に考察するかわりに，**図2** のように $n\times n$ 個の枡の中におかれた $3n-3$ 個の $*$ から r 個を同一の行および列には並ばないように取り出す方法の数を $d_r^{(n)}$ と表し，それの漸化式について考察しよう．ここでは $n\geq r\geq 0$ とし，$n\leq 3$ の場合には対角線上およびそれより右上の枡の中には $*$ がおかれているものとする．

枡の中におかれた $*$ のうちの特定の1個，たとえば右下隅の★に着目し，それを含めずに r 個を取り出す場合と，含めて r 個を取り出す場合とに分けて考えることにしよう．★を含めずに r 個を取り出す場合には，単に枡の中の★を消して，残りの $*$ の中から r 個を取り出せばよい．ところが，n 行目の枡はすべて空だから，この行は取り除くことができるので，**図3** の $(n-1)\times n$ 個の枡の中の $*$ を r 個を取り出せばよい．その数を $M_r^{(n-1)\times n}$ と書こう．★を含めて r 個を取り出す場合には，★の含まれる行と列の中にある $*$ は取り出すことができないから，その行と列を消去した $(n-1)\times(n-1)$ 個の枡の中の $*$ から $r-1$ 個の $*$ を取り出す方法の数 $d_{r-1}^{(n-1)}$ となる．すなわち，

$$d_r^{(n)} = M_r^{(n-1)\times n} + d_{r-1}^{(n-1)} \tag{2}$$

を得る．ただし，$n\geq r\geq 1$ とし，$r=n$ の場合には $M_r^{(n-1)\times n}=0$ とおく．

次に，$M_r^{(n-1)\times n}$ について考察しよう．図3の枡の中に置かれた $*$ の中で左上隅の★に着目しよう．それを含めずに r 個を取り出す場合には，単に★を消して，残りの $*$ の中から r 個を取り出せばよい．ところが，1列目の枡は，すべて空だから取り除くことができるので，**図4** の $(n-1)\times(n-1)$ 個の枡の中の $*$ を r 個を取り出せばよい．その数を $e_r^{(n-1)}$ と書こう．★を含めて r 個を取り出す場合には，★の含まれる行と列の中にある $*$ は取り出すことができないから，その行と列を消去した $(n-2)\times(n-1)$ 個の枡の中の $*$ から $r-1$ 個を取り出す方法の数 $M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)}$ となる．すなわち，

$$M_r^{(n-1)\times n} = e_r^{(n-1)} + M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)} \tag{3}$$

を得る．ただし，$n-1\geq r\geq 2$ とする．

同様にして，$e_r^{(n)}$ を分解すると，

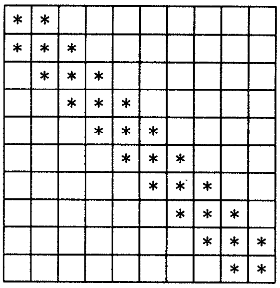


図4 $e_r^{(n-1)}$ を求めるための枡と $*$
Fig. 4 Cells and $*$'s to evaluate $e_r^{(n-1)}$.

$$e_r^{(n)} = M_r^{(n-1)\times n} + M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)} + e_{r-1}^{(n-1)} + e_{r-2}^{(n-2)} \tag{4}$$

を得る．ただし，$n \geq r \geq 3$ とする．

式 (2) と (3) から $M_r^{(n-1)\times n}$ および $e_r^{(n)}$ は，それぞれ $d_r^{(n)}$ を用いて表すことができる．それらを式 (4) に代入すると $d_r^{(n)}$ についての漸化式，

$$d_r^{(n)} = d_r^{(n-1)} + 3d_{r-1}^{(n-1)} - 2d_{r-2}^{(n-2)} - d_{r-2}^{(n-3)} - d_{r-3}^{(n-3)} + d_{r-4}^{(n-4)} \tag{5}$$

を得る．ただし，$n-1 \geq r \geq 4$ とする．

最後に，$c_r^{(n)}$ についても同様の分解を繰り返すと，$c_r^{(n)}$ もまた，$d_r^{(n)}$ の一次結合，

$$c_r^{(n)} = d_r^{(n)} + d_{r-1}^{(n)} + 2d_{r-1}^{(n-1)} - d_{r-2}^{(n-2)} - 3d_{r-3}^{(n-2)} + 2d_{r-4}^{(n-3)} \tag{6}$$

で表されることが分かる．ただし，$n \geq r \geq 4$ とする．ゆえに，$c_r^{(n)}$ も $d_r^{(n)}$ と同じ漸化式，

$$c_r^{(n)} = c_r^{(n-1)} + 3c_{r-1}^{(n-1)} - 2c_{r-2}^{(n-2)} - c_{r-2}^{(n-3)} - c_{r-3}^{(n-3)} + c_{r-4}^{(n-4)} \tag{7}$$

を満たすことが分かる☆．式 (7) の成立範囲は，以上の導出手順によれば $n \geq r \geq 8$ となるが，次のようにして拡張することができる．

まず，本来 $d_r^{(n)}$ は $n \geq r \geq 0$ に対して定義されていたが，負の整数 n に対して $d_n^{(n)} = 1$，またこれら以外すなわち，

$$n < r,\ \text{または}\ \ n > r\ \text{かつ}\ r < 0 \tag{8}$$

を満たす任意の整数 n，r に対して $d_r^{(n)} = 0$ とおくと $d_r^{(n)}$ は任意の整数 n，r に対して定義されていることになる．

次に，$n \geq r \geq 1$ を満たさない任意の整数 n，r に対して $M_r^{(n-1)\times n}$ を式 (2) によって定義する．その結果 $n-1 \geq r \geq 0$ 以外の領域では $M_r^{(n-1)\times n} = 0$ となる．

さらに，$n \geq r \geq 3$ を満たさない任意の整数 n，r に対して $e_r^{(n)}$ を式 (3) によって定義すると式 (4) が $(n,r) \neq (0,0)$ の任意の整数の組について，したがって式 (5) が $(n,r) \neq (1,0)$ の任意の整数の組について成立することが分かる．

このように定義域を拡張した $d_r^{(n)}$ に対して，式 (6) は本来 $c_r^{(n)}$ がよく定義されている $n \geq 3$ かつ $n \geq r \geq 0$ の任意の整数 n，r に対して成立する．そこで，それ以外の n，r に対して，$c_r^{(n)}$ をとりあえず式 (6) で定義すると，式 (5) の成立条件 $(n,r) \neq (1,0)$ より式 (7) が，

$$(n,r) \neq (1,0),\ (1,1),\ (2,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,4) \tag{9}$$

の任意の整数の組について成立することが分かる．また，新たに定義された $c_r^{(n)}$ は $c_0^{(2)} = 1$，$c_1^{(2)} = 6$，$c_2^{(2)} = 5$，$c_0^{(1)} = 1$，$c_1^{(1)} = 3$，負または 0 の整数 n に対して $c_n^{(n)} = 2$，それ以外すなわち式 (8) を満たす n，r に対して $c_r^{(n)} = 0$ となる．$n < 3$ のときの $c_r^{(n)}$ をどのように定義するかは本来自由であるので，上の定義に変更を加えて，$c_0^{(0)} = 3$，また，

$$c_r^{(n)} = 0 \quad (n \geq r \geq 0\ \text{以外の}\ n,\ r\ \text{に対して}) \tag{10}$$

となるようにしよう．すなわち，

$$c_r^{(n)} = d_r^{(n)} + d_{r-1}^{(n)} + 2d_{r-1}^{(n-1)} - d_{r-2}^{(n-2)} - 3d_{r-3}^{(n-2)} + 2d_{r-4}^{(n-3)} + \delta_r^{(n)} \tag{11}$$

ただし $\delta_r^{(n)}$ は $n = r = 0$ のとき 1，$n = r < 0$ のとき -2，その他の場合は 0 になるような関数である．$\delta_r^{(n)}$ を加えたことによって式 (7) の成立条件 (9) が変更を受け，

$$(n,r) \neq (0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (4,4) \tag{12}$$

となることは容易に確かめられる．

このように，式 (6) を修正した式 (11) を用いて $c_r^{(n)}$ の定義域を拡張することにより $c_r^{(n)}$ の漸化式 (7) の成立範囲を広げることができる．それに反し，$d_r^{(n)}$ の場合には $n \geq r \geq 0$ 以外の n，r に対してつねに 0 と定義すると式 (4)，(5) が非成立となる (n,r) の組が増え議論が複雑になるので，上述のような定義を採用したのである．

☆ この漸化式は，遠藤のぶ久氏（私信）によっても独立に導出された．

2.2 より単純な $c_r^{(n)}$ の漸化式

上で導かれた $c_r^{(n)}$ の漸化式 (7) が，実は，より単純な漸化式を合成したものであることが次のようにして示される．

まず，式 (3) を用いて $e_r^{(n)}$ を $M_r^{(n-1)\times n}$ で表し，式 (4) に代入すると $M_r^{(n-1)\times n}$ についての漸化式，

$$\begin{aligned}M_r^{(n-1)\times n} = M_r^{(n-2)\times(n-1)} + 2M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)} \\ + M_{r-1}^{(n-3)\times(n-2)} - M_{r-3}^{(n-4)\times(n-3)} \\ + \delta_{n,1}\delta_{r,0} \qquad (13)\end{aligned}$$

が得られる．ここに $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ関数であり，その積を補正項として付け加えることによって，式 (13) は任意の n，r について成立する．

次に，式 (2) を $d_r^{(n)}$ について解くと，

$$\begin{aligned}d_r^{(n)} &= M_r^{(n-1)\times n} + M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)} + \cdots \\ &\quad + M_{r-N}^{(n-N-1)\times(n-N)} + d_{r-N-1}^{(n-N-1)} \\ &= M_r^{(n-1)\times n} + M_{r-1}^{(n-2)\times(n-1)} \\ &\quad + M_{r-2}^{(n-3)\times(n-2)} + M_{r-3}^{(n-4)\times(n-3)} + \cdots \\ &\quad + \delta_{n,r} \qquad (14)\end{aligned}$$

のように形式上，無限級数で表される．ここに第 2 の等式は第 1 の等式で整数 N を限りなく大きくした極限を表し，$d_r^{(n)}$ の定義により，十分大きな整数 N に対して $d_{r-N-1}^{(n-N-1)} = \delta_{n-N-1,r-N-1} = \delta_{n,r}$ となることを用いた．また，右辺の和の中で $M_{-1}^{(n-r-2)\times(n-r-1)}$ およびその先の項は実際はすべて 0 である．式 (13)，(14) から $M_r^{(n-1)\times n}$ を消去すると，$d_r^{(n)}$ も式 (13) と同じ形の漸化式，

$$\begin{aligned}d_r^{(n)} = d_r^{(n-1)} + 2d_{r-1}^{(n-1)} + d_{r-1}^{(n-2)} - d_{r-3}^{(n-3)} \\ + \epsilon_r^{(n)} \qquad (15)\end{aligned}$$

を満たすことが分かる．ただし補正項 $\epsilon_r^{(n)}$ は $r \geq 0$ のとき $-\delta_{n,r+1}$，$r < 0$ のとき $-2\delta_{n,r+1}$ である．

一方，$c_r^{(n)}$ は式 (11) により $d_r^{(n)}$ の一次結合（および補正項）で表されているので，式 (11)，(15) より $c_r^{(n)}$ もまた式 (13) や (15) と同じ形の漸化式，

$$\begin{aligned}c_r^{(n)} = c_r^{(n-1)} + 2c_{r-1}^{(n-1)} + c_{r-1}^{(n-2)} - c_{r-3}^{(n-3)} \\ + \Delta_r^{(n)} \qquad (16)\end{aligned}$$

を満たすことが分かる．ここに，$\Delta_0^{(0)} = 3$，$\Delta_1^{(1)} = -3$，$\Delta_2^{(2)} = -1$，$\Delta_3^{(3)} = -1$，これら 4 組の (n, r) を除き $r \geq 0$ のとき $\Delta_r^{(n)} = -2\delta_{n,r+1}$，また $r < 0$ のとき $\Delta_r^{(n)} = 0$ である．

式 (15) と，同式で n，r を $n-1$，$r-1$ と書き改めたものを辺々引き算して整理すると，

$$\begin{aligned}d_r^{(n)} = d_r^{(n-1)} + 3d_{r-1}^{(n-1)} - 2d_{r-2}^{(n-2)} - d_{r-2}^{(n-3)} \\ - d_{r-3}^{(n-3)} + d_{r-4}^{(n-4)} + \epsilon_r'^{(n)} \qquad (17)\end{aligned}$$

を得る．ここに $\epsilon_r'^{(n)} = \delta_{n,1}\delta_{r,0}$ である．また，式 (16) についても同様の操作を行うと，

$$\begin{aligned}c_r^{(n)} = c_r^{(n-1)} + 3c_{r-1}^{(n-1)} - 2c_{r-2}^{(n-2)} - c_{r-2}^{(n-3)} \\ - c_{r-3}^{(n-3)} + c_{r-4}^{(n-4)} + \Delta_r'^{(n)} \qquad (18)\end{aligned}$$

が得られる．ここに，$\Delta_0'^{(0)} = 3$，$\Delta_1'^{(1)} = 6$，$\Delta_2'^{(2)} = -2$，$\Delta_4'^{(4)} = 1$，$\Delta_0'^{(1)} = -2$，その他の場合に $\Delta_r'^{(n)} = 0$ である．

式 (15)，(16) から式 (17)，(18) を導く過程で補正項 $\epsilon_r^{(n)}$，$\Delta_r^{(n)}$ の $\delta_{n,r+1}$ に比例する項が打ち消し合い，$\epsilon_r'^{(n)}$ あるいは $\Delta_r'^{(n)}$ が 0 と異なる値をとるのはそれぞれ 1 個あるいは 5 個の (n, r) に対してのみとなる．このようにして式 (5) および (7) とそれらの成立範囲が再現されることが分かった．

特に $n = r$ の場合に，漸化式 (16) は，

$$c_n^{(n)} = 2c_{n-1}^{(n-1)} - c_{n-3}^{(n-3)} \qquad (19)$$

となる（ただし $n \geq 4$）．この漸化式の特性多項式 $x^3 - 2x^2 + 1$ が $(x-1)(x^2-x-1)$ と因数分解されることからも予想されることであるが，式 (19) がさらに簡単な漸化式を合成したものになっていることが次のようにして示される．まず，任意の n に対して $M_n^{(n-1)\times n} = 0$ であるので式 (4) より，

$$e_n^{(n)} = e_{n-1}^{(n-1)} + e_{n-2}^{(n-2)} \qquad (20)$$

ただし $n \geq 1$，また，式 (2)，(3) および任意の n に対して $d_n^{(n)} = 1$ であることを用いると式 (11) は $n \geq 1$ のとき，

$$c_n^{(n)} = e_{n-1}^{(n-1)} + 2\,e_{n-2}^{(n-2)} + 2 \qquad (21)$$

となるので，$c_n^{(n)} - 2$ は式 (20) と同じ形の漸化式を満たすこと，すなわち $n \geq 3$ に対して，

$$c_n^{(n)} = c_{n-1}^{(n-1)} + c_{n-2}^{(n-2)} - 2 \qquad (22)$$

となることが分かる．この式と，同式で n を $n-1$ と書き改めたものを辺々引き算して整理したものが式 (19) である．

2.3 $c_r^{(n)}$ の漸化式の解

これまで，$c_r^{(n)}$ がどのような漸化式を満たすかを見てきたが，逆に，漸化式の解として $c_r^{(n)}$ がどのように定まるかを考えてみよう．もちろん，境界条件 (10) と漸化式 (16) から，すべての $c_r^{(n)}$ が定まることは明らかであるが，非同次の「補正項」$\Delta_r^{(n)}$ の振舞いが

必ずしも良いとはいえないので，ここでは漸化式 (7) および (22) を考察の対象とすることにする．その場合には上で導かれた結果より，条件 (10) と，

$$c_0^{(0)} = 3, \quad c_0^{(1)} = 1, \quad c_1^{(1)} = 3, \quad c_2^{(2)} = 5 \tag{23}$$

の 4 つの値から，漸化式 (7) および (22) によりすべての $c_r^{(n)}$ の値が次のように定まることが分かる．

まず，$c_1^{(1)}$，$c_2^{(2)}$ の値および漸化式 (22) によりすべての $n \geq 1$ に対して $c_n^{(n)}$ の値が決まる．実際，$c_n^{(n)}$ はこの漸化式の特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 根 $\alpha_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ を用い，

$$c_n^{(n)} = \alpha_+^n + \alpha_-^n + 2 \qquad (n \geq 1)$$

と書き下すことができる[1)]．

次に，$c_0^{(1)}$ の値と漸化式 (7) により，$n \geq 2$ に対する $c_0^{(n)}$ が定まり，結局 $n \geq 1$ に対して $c_0^{(n)} = 1$ となる．$n > r \geq 1$ に対する $c_r^{(n)}$ は漸化式 (7) により順次定まり，結局 $n > r \geq 0$ に対する $c_r^{(n)}$ が変数 n についての r 次多項式になること，そしてそれらの多項式が $n > r \geq 0$ において，文献 3) で得られた $c_r^{(n)}$ の表式と一致することが分かる．

これらの多項式の $n = r \geq 0$ における値と $c_n^{(n)}$ の値との関係を調べるために漸化式 (7) を右辺第 1 項について整理し $n-1$ を n と書き改め，

$$\begin{aligned} c_r^{(n)} = c_r^{(n+1)} - 3c_{r-1}^{(n)} + 2c_{r-2}^{(n-1)} + c_{r-2}^{(n-2)} \\ + c_{r-3}^{(n-2)} - c_{r-4}^{(n-3)} \end{aligned} \tag{24}$$

の形にすると，これは少なくとも $n \geq r \geq 1$ に対して成立する．$n > r \geq 0$ に対しては $c_r^{(n)}$ が上述の多項式で表され，また，$c_0^{(n)} = 1 + 2\delta_{n,0}$ と書けることを用い，漸化式 (24) を $n = r \geq 1$ の場合に適用すると，$c_0^{(n)}$ の（0 次）多項式からのずれ $2\delta_{n,0}$ が式 (24) の右辺第 4 項 $c_{r-2}^{(n-2)}$ によって順次伝播し，偶数の r に対しては $c_r^{(n)}$ に $2\delta_{n,r}$ の項が付け加わることが分かる．これが文献 3) で得られた $\{1 + (-1)^n\}\delta_{n,r}$ の項の由来である．

漸化式 (7) の解としての $c_r^{(n)}$ について，少々別の見方をすることもできる．まず，漸化式 (7) を任意の n，r に対して満たし，$r < 0$ においていたるところ 0 で，$n = 0$ における境界値が $a_r\ (r = 0, 1, 2, \ldots)$ であるような解を求めてみよう．まず，$a_r = \delta_{r,0}$ の場合の解を $c_r(n)$ と書くと，$c_r(n)$ は $r \geq 0$ において n についての r 次多項式であり，$r > 0$ において定数項はいずれも 0 であることが分かる（実はこの多項式は上述の多項式と同一のものである）．一般の a_r に対しては $c_r(n)$ の一次結合を作り，

$$C_r(n) = \sum_{s \geq 0} a_s c_{r-s}(n) \tag{25}$$

とおくと，$C_r(n)$ は漸化式 (7) および境界条件 $C_r(0) = a_r\ (r = 0, 1, 2, \ldots)$ を満たす．その意味で $c_r(n)$ は式 (7) の基本的な解であるが，この $c_r(n)$ に以下のような変更を加えたものが $c_r^{(n)}$ であると考えることができる．まず，$n < r$ における値を 0 にする．そのままでは，$n = r \geq 0$ のとき式 (7) を満たさなくなるので，$c_n(n)$ に，次のようにして決める b_n を加えて修正する．b_n を加えたとき $n - 1 = r \geq 2$ に対して式 (7) が依然として成立するためには，式 (7) 右辺の $c_r^{(n-1)}$ および $-c_{r-2}^{(n-3)}$ の 2 つの項からの寄与の和が変化しないことが必要であるので，任意の負でない整数 m に対して，$b_{2m} = b_0$，$b_{2m+1} = b_1$ でなければならない．$b_0 \neq 0$ のときは $(n, r) = (1, 0)$ において，$b_1 \neq 0$ のときは $(n, r) = (2, 1)$ において式 (7) は不成立となるが，少なくとも一方を犠牲にして，$n = r$ の場合の不成立箇所をできるだけ減らすことを試みよう．$n = r \geq 5$ に対して式 (7) が成立する条件を調べると，

$$b_0 = 3\,b_1 - 2\,b_0 - b_1 + b_0 + 4,$$
$$b_1 = 3\,b_0 - 2\,b_1 - b_0 + b_1 - 4$$

すなわち，$b_0 - b_1 = 2$ でなければならないことが分かる．式 (7) の不成立となる (n, r) の組ができるだけ少なく，かつ，そのような n，r ができるだけ小さくなることを要請すると $b_0 = 2$，$b_1 = 0$ となり，このときの b_n を多項式 $c_r(n)$ に加えたものが $c_r^{(n)}$ であると考えることができる．すなわち，$n \geq r \geq 0$ に対して

$$c_r^{(n)} = c_r(n) + \{1 + (-1)^n\}\delta_{n,r} \tag{26}$$

となり，やはり文献 3) で得られた表式を再現できる．

2.4 $c_r^{(n)}$ の漸化式の応用

$c_r^{(n)}$ の r 依存性を

$$\begin{aligned} c_r^{(n)} \\ = \frac{(3n)}{r!}\left[(3n)^{r-1} - \sum_{i=2}^{r}(-1)^i f_i(r)\binom{r}{i}(3n)^{r-i}\right] \\ + \left(1 + (-1)^n\right)\,\delta_{n,r} \end{aligned} \tag{27}$$

と仮定して[3)]，漸化式 (7) または (16) に代入すると，$f_i(r)$ の満たすべき方程式が得られる．

実際に式 (27) の最初の数項を求めてみよう．最初に $(3n)^{r-2}$ の係数を比較することにより $f_2(r)$ の満たすべき漸化式

$$(r-1)f_2(r) - (r-2)f_2(r-1) = 5$$

が得られる．これに境界条件 $f_2(2)=5$ を組み合わせると，すべての $r \geq 0$ について

$$f_2(r)=5 \tag{28}$$

の成り立つことが分かる．式 (28) を $(3n)^{r-3}$ の係数に代入して，次に $f_3(r)$ の満たすべき関係式を導くと，

$$(r-2)f_3(r)-(r-3)f_3(r-1)=\frac{75}{2}r-\frac{109}{2}$$

となる．境界条件 $f_3(3)=58$ を代入すると，

$$f_3(r)=\frac{75r+7}{4} \tag{29}$$

を得る．式 (28) および (29) を $(3n)^{r-4}$ の係数に代入して $f_4(r)$ の満たすべき関係式を導くと，

$$(r-3)f_4(r)-(r-4)f_4(r-1) = \frac{375}{2}r^2-\frac{1055}{2}r+188$$

となる．境界条件として $f_4(4)=1078$ を代入すると，

$$f_4(r)=\frac{125r^2+35r+16}{2} \tag{30}$$

を得る．

このように，漸化式 (16) と境界条件 (10)，あるいは，漸化式 (7) および (22) と境界条件 (10)，(23) から，文献 3) で経験的に導き出した $c_r^{(n)}$ の表式のみならず，その他の関係式も系統的に導出できることが分かった．

3. $k=4$ における $c_r^{(n)}$

前章で用いた方法が，$k=4$ の場合，すなわち連続する 4 つの値が禁止された占有問題にも適用できることを示そう．

この場合にも，置換の総数は包含と排除の原理に基づく式 (1) を用いて表すことができるが，$c_r^{(n)}$ の意味するところは，$n \times n$ 個の枡の中におかれた $4n$ 個の $*$ から r 個を同一の行および列には並ばないように取り出す方法の数となる．その値をコンピュータを用いて直接に数え上げた結果を**表 1** に示す．計算は，DECstation 5000/240 および AlphaStation 200 4/233 を用いて行った．所要時間については，たとえば $c_{13}^{(n)}$ を n が 13 から 22 まで計算するのに AlphaStation でおよそ 100 時間程度であった．

これらの結果を子細に検討すると，$k=4$ の場合にも $k=3$ の場合と同様な規則性の存在を強く示唆している．文献 3) と同様の手順に従って法則性を探ってみると，r が偶数の場合には $n \geq 3r/2+1$ で，奇数の場合には $n \geq 3(r-1)/2$ で，$c_r^{(n)}$ を r の関数を係数に持つ $4n$ についての r 次多項式，

$$c_r(n) = \frac{(4n)}{r!}\left[(4n)^{r-1}-\sum_{i=2}^{r}(-1)^i f_i(r)\binom{r}{i}(4n)^{r-i}\right] \tag{31}$$

で表すことができることが分かる．r が 0 から 13 までの多項式 $c_r(n)$ を**表 2** に掲げる．

関数 $f_i(r)$ は一般に，

$$f_i(r)=a_{i-2}^{(i)}r^{i-2}+a_{i-3}^{(i)}r^{i-3}+\cdots+a_1^{(i)}r + a_0^{(i)} \tag{32}$$

と表されるような r についての $i-2$ 次多項式であろうと推測できる．$f_2(r)$ から $f_9(r)$ を**表 3** に記す．

関数式 (32) の係数にもまた簡単な規則性のあることが読み取れ，$a_{i-j}^{(i)}$ もまた

$$a_{i-j}^{(i)}=g_j(i)\binom{i}{j}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-j} \tag{33}$$

と書き表すことができるだろう．ここに，$g_j(i)$ は $j \geq 3$ の場合には i についての $j-3$ 次多項式，

$$g_j(i)=b_{j-3}^{(j)}i^{j-3}+b_{j-4}^{(j)}i^{j-4}+\cdots+b_1^{(j)}i+b_0^{(j)} \tag{34}$$

である．j が 2 から 7 までの $a_{i-j}^{(i)}$ を**表 4** に示す．

表 4 から，

$$b_{j-3}^{(j)}=\frac{23^{j-2}}{2^{2j-4}3^{j-2}7^{j-3}}\binom{j}{2},$$
$$b_{j-4}^{(j)}/b_{j-3}^{(j)}=\frac{(6477j-14012)}{1058}\binom{j-3}{1} \tag{35}$$

と表されるであろうと推測できる．このこと，および $k \leq 3$ での経験から，一般に

$$b_{j-l}^{(j)}/b_{j-3}^{(j)}=h_l(j)\binom{j-3}{l-3}$$

と書けると推測できる．ここに，$h_l(j)$ は j についての $l-3$ 次多項式である．

$k=3$ の場合には $c_r^{(n)}$ は式 (25) のように n の多項式に，$n=r$ かつそれらが偶数のときにのみ 2 という値を持つ補正項を加えたものであった．$k=4$ の場合に，

$$c_r^{(n)} = c_r(n)+\Delta(n,r) \tag{36}$$

とおき表 1 および表 2 を比較すると，n の多項式からのずれを表す $\Delta(n,r)$ は一般に，

$$\Delta(3s,2s)=3, \tag{37}$$
$$\Delta(3s-1,2s)=6s-2, \tag{38}$$
$$\Delta(3s-2,2s)=6s^2-s-2, \tag{39}$$
$$\Delta(3s-1,2s+1)=-24s+8, \tag{40}$$

表1 $c_r^{(n)}$ の値
Table 1 Numerical values of $c_r^{(n)}$.

n	$c_1^{(n)}$	$c_2^{(n)}$	$c_3^{(n)}$	$c_4^{(n)}$	$c_5^{(n)}$	$c_6^{(n)}$	$c_7^{(n)}$	$c_8^{(n)}$
4	16	72	96	24				
5	20	130	320	265	44			
6	24	204	752	1185	672	80		
7	28	294	1456	3521	3892	1617	144	
8	32	400	2496	8264	14272	11776	3776	264
9	36	522	3936	16659	39924	52071	33480	8577
10	40	660	5840	30210	93568	171060	175360	90745
11	44	814	8272	50677	193556	461208	667832	554532
12	48	984	11296	80076	364896	1079880	2051712	2420673
13	52	1170	14976	120679	640276	2274428	5398120	8401523
14	56	1372	19376	175014	1061088	4411372	12630528	24673537
15	60	1590	24560	245865	1678452	8009680	26957400	63795660
16	64	1824	30592	336272	2554240	13778144	53431808	149191368
17	68	2074	37536	449531	3762100	22656852	99654408	321677689
18	72	2340	45456	589194	5388480	35862756	176636160	648590067
19	76	2622	54416	759069	7533652	54939336	299837176	1236117466
20	80	2920	64480	963220	10312736	81810360	490398080	2245527650
21	84	3234	75712	1205967	13856724	118837740	776580264	3914028111
22	88	3564	88176	1491886	18313504	168883484	1195431424	6581073653

n	$c_9^{(n)}$	$c_{10}^{(n)}$	$c_{11}^{(n)}$	$c_{12}^{(n)}$	$c_{13}^{(n)}$
9	484				
10	19080	888			
11	236808	41745	1632		
12	1666656	599112	90048	3000	
13	8257652	4803695	1477216	191945	5516
14	32130168	26782000	13367648	3564001	404992
15	104684360	116023053	83230920	36104590	8439960
16	297633024	417051648	398977792	249368224	95038464
17	759582780	1297913620	1574221080	1315391099	723830828
18	1775622488	3601099620	5340053520	5670624075	4180450464
19	3859474864	9097600558	16050599752	20885352140	19607335608
20	7890126560	21259849712	43691207040	67780883500	78126127520
21	15307473412	46513412232	109487935704	198240201719	272923822668
22	28384401144	96181481044	255789598160	531425660788	855364860064

$$\Delta(3s-2, 2s+1) = -48s^2 + 8s + 16, \qquad (41)$$

のように，整数のパラメータ s についての $(3[r/2]-n)$ 次多項式で表すことができるものと思われる．ここに，式 (37)～(40) の場合は $s \geq 2$，式 (41) の場合は $s \geq 3$，また $[x]$ は x を超えない最大の整数である．

4. $k=4$ における $c_r^{(n)}$ の漸化式

4.1 $c_r^{(n)}$ の漸化式とその成立条件

$k=4$ における $c_r^{(n)}$ の満たす漸化式は，どのようなものであろうか．まず最初に，$c_r^{(n)}$ の漸化式を直接に考察するかわりに，$k=3$ の場合と同様に，図**5** のような $n \times n$ 個の枡の中におかれた $4n-6$ 個の $*$ から r 個を同一の行および列には並ばないように取り出す方法の数を $d_r^{(n)}$ と表し，それの漸化式について考察しよう．ここで，$n \geq r \geq 0$ とし，$n \leq 4$ の場合には，対角線上およびそれより右上の枡の中には $*$ がおかれているものとする．次に $k=3$ の場合と同様にして，負の整数 n に対して $d_n^{(n)}=1$，また，式 (8) を満たす任意の整数 n，r に対して $d_r^{(n)}=0$ とおいて $d_r^{(n)}$ の定義域を拡張すると，$k=3$ の場合に式 (15) を導いたのと同様の手順によって $d_r^{(n)}$ の満たす漸化式を求めることができる．計算は繁雑になるが，質的に新しい問題は生じないので結果のみを記すと，

$$\begin{aligned} d_r^{(n)} &= d_r^{(n-1)} + 4d_{r-1}^{(n-1)} - 4d_{r-2}^{(n-2)} - d_{r-2}^{(n-3)} \\ &\quad - d_{r-2}^{(n-4)} - 4d_{r-3}^{(n-4)} - 2d_{r-4}^{(n-4)} + 3d_{r-4}^{(n-5)} \\ &\quad + 4d_{r-5}^{(n-5)} + d_{r-6}^{(n-7)} - d_{r-8}^{(n-8)} + \epsilon_r^{(n)} \end{aligned} \qquad (42)$$

表 2 多項式 $c_r(n)$
Table 2 Polynomials $c_r(n)$.

$c_i(n)$
$c_0(n) = 1$
$c_1(n) = 4n$
$c_2(n) = 4n(4n-7)/2!$
$c_3(n) = 4n((4n)^2 - 21(4n) + 116)/3!$
$c_4(n) = 4n((4n)^3 - 42(4n)^2 + 611(4n) - 3114)/4!$
$c_5(n) = 4n((4n)^4 - 70(4n)^3 + 1895(4n)^2 - 23690(4n) + 116304)/5!$
$c_6(n) = 4n((4n)^5 - 105(4n)^4 + 4525(4n)^3 - 100575(4n)^2 + 1159354(4n) - 5575080)/6!$
$c_7(n) = 4n((4n)^6 - 147(4n)^5 + 9205(4n)^4 - 315525(4n)^3 + 6269914(4n)^2 - 68765088(4n) + 326436480)/7!$
$c_8(n) = 4n((4n)^7 - 196(4n)^6 + 16786(4n)^5 - 816760(4n)^4 + 24462529(4n)^3 - 452435284(4n)^2 + 4799113164(4n) - 22583347920)/8!$
$c_9(n) = 4n((4n)^8 - 252(4n)^7 + 28266(4n)^6 - 1847664(4n)^5 + 77177289(4n)^4 - 2114813988(4n)^3 + 37217534444(4n)^2 - 385469206416(4n) + 1802465763840)/9!$
$c_{10}(n) = 4n((4n)^9 - 315(4n)^8 + 44790(4n)^7 - 3780630(4n)^6 + 209193033(4n)^5 - 7885478475(4n)^4 + 202906018160(4n)^3 - 3443433571620(4n)^2 + 35032530022416(4n) - 163028336808960)/10!$
$c_{11}(n) = 4n((4n)^{10} - 385(4n)^9 + 67650(4n)^8 - 7156050(4n)^7 + 505507233(4n)^6 - 24960523665(4n)^5 + 873956728700(4n)^4 - 21461237543900(4n)^3 + 354267379341216(4n)^2 - 3554521654939200(4n) + 16479038120832000)/11!$
$c_{12}(n) = 4n((4n)^{11} - 462(4n)^{10} + 98285(4n)^9 - 12726450(4n)^8 + 1116039903(4n)^7 - 69698892186(4n)^6 + 3167740760855(4n)^5 - 104921000749950(4n)^4 + 2485220356155196(4n)^3 - 40140869695368552(4n)^2 + 398305753939179360(4n) - 1840937508150048000)/12!$
$c_{13}(n) = 4n((4n)^{12} - 546(4n)^{11} + 138281(4n)^{10} - 21505770(4n)^9 + 2290270983(4n)^8 - 176169751758(4n)^7 + 10048882761203(4n)^6 - 428799690629310(4n)^5 + 13600843093296316(4n)^4 - 313060393161697896(4n)^3 + 4968455470815616416(4n)^2 - 48854892123541969920(4n) + 225232406042399078400)/13!$

表 3 関数 $f_i(r)$
Table 3 Functions $f_i(r)$.

$f_i(r)$
$f_2(r) = 7$
$f_3(r) = (147r + 23)/4$
$f_4(r) = (343r^2 + 161r + 96)/2$
$f_5(r) = (36015r^3 + 33810r^2 + 42965r + 20642)/48$
$f_6(r) = (50421r^4 + 78890r^3 + 159635r^2 + 166574r + 69120)/16$
$f_7(r) = (7411887r^5 + 17395245r^4 + 49654395r^3 + 83622259r^2 + 76740006r + 23716208)/576$
$f_8(r) = (7411887r^6 + 24353343r^5 + 91658175r^4 + 219826201r^3 + 329138922r^2 + 241012688r + 34159104)/144$
$f_9(r) = (778248135r^7 + 3409468020r^6 + 16198754670r^5 + 51560761560r^4 + 110654612215r^3 + 137688922980r^2 + 65272548884r - 17153994096)/3840$

となる．ただし，$\epsilon_r^{(n)}$ は $n-2 = r \leq 0$ または $(n,r) = (1,0)$ のとき 1，$(n,r) = (2,1)$，$(3,2)$，$(4,3)$ のとき -1，その他の場合は 0 である．

$k=3$ の場合の式 (11) に対応して $c_r^{(n)}$ は，

$$c_r^{(n)} = 2d_r^{(n+1)} - d_r^{(n)} - 4d_{r-1}^{(n)} + 3d_{r-1}^{(n-1)}$$

表4 係数 $a^{(i)}_{i-j}$
Table 4 Coefficients $a^{(i)}_{i-j}$.

$a^{(i)}_{i-j}$
$a^{(i)}_{i-2} = i\left(\frac{7}{2}\right)^{i-1}$
$a^{(i)}_{i-3} = \frac{23}{4}\binom{i}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-3}$
$a^{(i)}_{i-4} = \frac{529i+5948}{168}\binom{i}{4}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-4}$
$a^{(i)}_{i-5} = \frac{(60835i^2+2112895i+6120894)}{42336}\binom{i}{5}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-5}$
$a^{(i)}_{i-6} = \frac{(1399205i^3+98592375i^2+1190995978i-755604528)}{2370816}\binom{i}{6}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-6}$
$a^{(i)}_{i-7} = (6436343i^4+762311218i^3$ $+20923437985i^2+75602813990i-660003620976)$ / 28449792 $\binom{i}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^{i-7}$

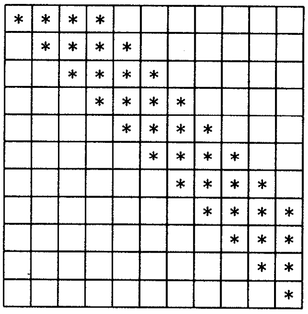


図5 $d^{(n)}_r$ を求めるための枡と $*$
Fig. 5 Cells and $*$'s to evaluate $d^{(n)}_r$.

$$
\begin{aligned}
&+4d^{(n-1)}_{r-2}-d^{(n-2)}_{r-2}+d^{(n-3)}_{r-2}+4d^{(n-3)}_{r-3}\\
&-6d^{(n-3)}_{r-4}-3d^{(n-4)}_{r-4}+4d^{(n-4)}_{r-5}+d^{(n-5)}_{r-5}\\
&-d^{(n-6)}_{r-6}-Q^{(n-2)\times(n-1)}_{r-1}+3Q^{(n-3)\times(n-2)}_{r-2}\\
&-2Q^{(n-4)\times(n-3)}_{r-3}-Q^{(n-5)\times(n-4)}_{r-4}\\
&-Q^{(n-6)\times(n-5)}_{r-5}+\delta^{(n)}_r \qquad (43)
\end{aligned}
$$

と表される．ここに，$\delta^{(n)}_r$ は $n=r<0$ のとき -2，$n-1=r\leq 0$ のとき -1，その他の場合は0である．$\delta^{(n)}_r$ をこのように定義することによって $c^{(1)}_0=1$，また $n\geq r\geq 0$ 以外の n，r に対して $c^{(n)}_r=0$ となる．また，$Q^{(n-1)\times n}_r$ は図6のような $(n-1)\times n$ 個の枡の中におかれた $4n-6$ 個の $*$ から r 個を同一の行および列には並ばないように取り出す方法の数である．ただし，$1<n<4$ の場合には，すべての枡の中に $*$ がおかれているものとし，$Q^{0\times 1}_0=1$，また $n>r\geq 0$ 以外の場合には $Q^{(n-1)\times n}_r=0$ とおく．このようにして任意の整数 n,r に対して定義された $Q^{(n-1)\times n}_r$ は漸化式，

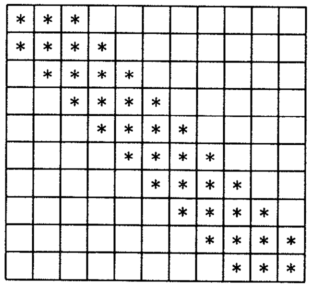


図6 $Q^{(n-1)\times n}_r$ を求めるための枡と $*$
Fig. 6 Cells and $*$'s to evaluate $Q^{(n-1)\times n}_r$.

$$
\begin{aligned}
Q^{(n-1)\times n}_r &= -Q^{(n-3)\times(n-2)}_{r-2}+d^{(n+1)}_r-3d^{(n)}_{r-1}\\
&\quad -d^{(n-1)}_{r-1}+2d^{(n-1)}_{r-2}+d^{(n-2)}_{r-2}\\
&\quad +d^{(n-3)}_{r-4}-d^{(n-4)}_{r-5}-\delta_{n,0}\delta_{r,0}
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

を満たす．

式(44)より $Q^{(n-1)\times n}_r$ を $d^{(n)}_r$ で展開して式(43)に代入し，式(42)を用いると，$c^{(n)}_r$ も $d^{(n)}_r$ と同じ形の漸化式，

$$
\begin{aligned}
c^{(n)}_r &= c^{(n-1)}_r+4c^{(n-1)}_{r-1}-4c^{(n-2)}_{r-2}-c^{(n-3)}_{r-2}\\
&\quad -c^{(n-4)}_{r-2}-4c^{(n-4)}_{r-3}-2c^{(n-4)}_{r-4}+3c^{(n-5)}_{r-4}\\
&\quad +4c^{(n-5)}_{r-5}+c^{(n-7)}_{r-6}-c^{(n-8)}_{r-8}+\Delta^{(n)}_r
\end{aligned}
\qquad (45)
$$

を満たすことが分かる．ただし，$\Delta^{(0)}_0=4$，$\Delta^{(1)}_1=-12$，$\Delta^{(2)}_2=8$，$\Delta^{(5)}_5=4$，$\Delta^{(8)}_8=-4$，$\Delta^{(1)}_0=-3$，$\Delta^{(3)}_2=1$，$\Delta^{(5)}_4=3$，$\Delta^{(7)}_6=3$，その他の場合は $\Delta^{(n)}_r=0$ である．

式(42)，(45)は $k=3$ の場合の式(15)，(16)に対

応するものである．式 (15)，(16) においては本来興味のある $n \geq 3$，$r \geq 0$ の場合に限っても $\epsilon_r^{(n)} \neq 0$ あるいは $\Delta_r^{(n)} \neq 0$ となる n，r の組が無限個あったのに対して，式 (42)，(45) の場合には $n \geq 4$，$r \geq 0$ の領域でそのような n，r の組はそれぞれ 1 個および 4 個のみである．式 (42) や式 (45) で n，r を $n-1$，$r-1$ と書き改めたものを辺々引き算して整理すると $k=3$ の場合の式 (17) や式 (18) に対応する漸化式が得られるが，上述の領域で非同次の補正項が 0 と異なる値を持つ n，r の組の数は減らないので，そのような漸化式を考える利点は少なく，$k=3$ の場合とは事情が異なっている．

特に $n=r$ の場合に，漸化式 (45) は $n \geq 9$ に対して，

$$c_n^{(n)} = 4c_{n-1}^{(n-1)} - 4c_{n-2}^{(n-2)} - 2c_{n-4}^{(n-4)} + 4c_{n-5}^{(n-5)} - c_{n-8}^{(n-8)} \tag{46}$$

となる．この漸化式の特性多項式 $x^8 - 4x^7 + 4x^6 + 2x^4 - 4x^3 + 1$ は $(x-1)^2(x^3-x^2-x-1)^2$ と因数分解され，$k=3$ の場合の式 (22) と同様にして $n \geq 4$ に対して，

$$c_n^{(n)} = c_{n-1}^{(n-1)} + c_{n-2}^{(n-2)} + c_{n-3}^{(n-3)} - 4 \tag{47}$$

を導くことができる．式 (47) を組み合わせて式 (46) がどのように構成されるかは，後者の特性多項式の構造から明らかである．

4.2 $c_r^{(n)}$ の漸化式の解

$k=3$ の場合と同様にして，式 (10) の条件と，

$$c_0^{(0)} = 4,\ c_1^{(1)} = 4,\ c_2^{(2)} = 8,\ c_3^{(3)} = 16,\ c_0^{(1)} = 1,\ c_2^{(3)} = 33,\ c_4^{(5)} = 265,\ c_6^{(7)} = 1617 \tag{48}$$

の 8 つの値から，漸化式 (47)，および式 (45) で非同次の補正項 $\Delta_r^{(n)}$ を除いた漸化式，

$$\begin{aligned} c_r^{(n)} = {} & c_r^{(n-1)} + 4c_{r-1}^{(n-1)} - 4c_{r-2}^{(n-2)} - c_{r-2}^{(n-3)} \\ & - c_{r-2}^{(n-4)} - 4c_{r-3}^{(n-4)} - 2c_{r-4}^{(n-4)} + 3c_{r-4}^{(n-5)} \\ & + 4c_{r-5}^{(n-5)} + c_{r-6}^{(n-7)} - c_{r-8}^{(n-8)} \end{aligned} \tag{49}$$

によりすべての $c_r^{(n)}$ の値が定まることが，これらの漸化式の成立条件から分かる．

まず，境界条件 $c_1^{(1)} = 4$，$c_2^{(2)} = 8$，$c_3^{(3)} = 16$ のもとでの漸化式 (47) の解は，その特性多項式 x^3-x^2-x-1 の零点を α_0，$\alpha_\pm$，すなわち，

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{38+6\sqrt{33}}} + \frac{\sqrt[3]{38+6\sqrt{33}}}{3\sqrt[3]{2}}$$

$$\alpha_\pm = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt[3]{2}(1\pm\sqrt{3}i)}{3\sqrt[3]{38+6\sqrt{33}}} - \frac{(1\mp\sqrt{3}i)\sqrt[3]{38+6\sqrt{33}}}{6\sqrt[3]{2}}$$

とするとき，

$$c_n^{(n)} = 2\alpha_0^n + 2\alpha_+^n + 2\alpha_-^n + 2 \quad (n \geq 1) \tag{50}$$

と表すことができる．

次に $n > r \geq 0$ に対する $c_r^{(n)}$ の値が式 (48) の残りの 5 つの境界値と漸化式 (49) から順次定まり結局，表 1 の値がすべて再現されることが確認できる．

一方，漸化式 (49) を任意の n，r に対して満たし，$r < 0$ においていたるところ 0 で，$n=0$ における境界値が $r=0$ のときのみ 1，他は 0 であるような解を求めると，それがまさに表 2 の $c_r(n)$ であることが分かり，$c_r^{(n)}$ はこの多項式 $c_r(n)$ に以下のような変更を加えたものと見なすことができる．その変更分を式 (36) のように $\Delta(n,r)$ とし，ここでは当初すべての n，r に対して $\Delta(n,r)=0$ としておき，以下の手順で，必要な場合にのみ 0 でない値を与えることにしよう．まず，$c_r^{(n)}$ が $n < r$ で 0 になるように，その範囲で $\Delta(n,r) = -c_r(n)$ とする．次に $n \geq 0$ に対して $c_n^{(n)}$ が上で得られた値になるように，$\Delta(n,n) = c_n^{(n)} - c_n(n)$ とする．このように定義した $\Delta(n,n)$ は $n=0$，2 および $n \geq 4$ に対して 0 と異なる値を持つ．$c_r(n)$ はすべての n，r に対して漸化式 (49) を満たしているから式 (36) で与えられる $c_r^{(n)}$ が式 (49) を満たす範囲は $\Delta(n,r)$ によって決まる．$n \leq r$ における上述の $\Delta(n,r)$ の定義によれば，その範囲は少なくとも $n<r$ および $n=r \geq 9$ を含むことが分かるが，それができるだけ大きくなるように，$n>r$ における $\Delta(n,r)$ の値を決めることを考えよう．そのために式 (49) の $c_r^{(n)}$ を $\Delta(n,r)$ で置き換え，右辺第 1 項について整理して $n-1$ を n と書き改めた後，$N=2n-3r$，$R=n-r$，$\Delta_{N,R} = \Delta(n,r)$ と置くと，

$$\begin{aligned} \Delta_{N,R} = {} & \Delta_{N,R-1} \\ & + \Delta_{N+2,R+1} + \Delta_{N+2,R} \\ & - 4\Delta_{N+3,R+1} + 4\Delta_{N+3,R} \\ & + 4\Delta_{N+4,R+1} - 3\Delta_{N+4,R} \\ & + 2\Delta_{N+6,R+1} - \Delta_{N+6,R} \\ & - 4\Delta_{N+7,R+1} \\ & + \Delta_{N+10,R+1} \end{aligned} \tag{51}$$

を得る．$\Delta_{N,R}$ はこれまでのところ $2R \geq N$ かつ $R \leq 0$ においてのみ 0 と異なりうる値を与えられて

いるが，$R > 0$ すなわち $n > r$ における値を式 (51) を用いて定めることにする．

まず，$N = 0$ の場合を考えると，式 (51) の右辺で第 1 項以外はすべて 0 であるので，$\Delta_{0,1} = \Delta_{0,0}$, $\Delta_{0,2} = \Delta_{0,1}, \cdots$ となり，$\Delta_{0,0} = \Delta(0,0) = 3$ より，$R \geq 0$ に対して $\Delta_{0,R} = 3$ を得る．次に，$N = 2$ の場合には式 (51) の右辺で第 1〜3 項からのみの寄与があり，$\Delta_{-2,0} = \Delta(2,2) = 4$ を用いて $\Delta_{-2,R} = 6R + 4$ を得る．同様にして，境界条件

$$\Delta_{-4,0} = \Delta(4,4) = 20$$
$$\Delta_{-5,0} = \Delta(5,5) = -40$$
$$\Delta_{-6,0} = \Delta(6,6) = 148$$
$$\Delta_{-7,0} = \Delta(7,7) = -392$$
$$\Delta_{-8,0} = \Delta(8,8) = 1220$$

より $\Delta_{N,R}$ が $R \geq 0$ に対して，

$$\Delta_{-4,R} = 6R^2 + 23R + 20,$$
$$\Delta_{-5,R} = -24R - 40,$$
$$\Delta_{-6,R} = 4R^3 + 38R^2 + 134R + 148,$$
$$\Delta_{-7,R} = -48R^2 - 280R - 392$$
$$\Delta_{-8,R} = 2R^4 + \frac{106}{3}R^3 + \frac{531}{2}R^2 + \frac{5713}{6}R + 1220$$

のように R の多項式として順次定まる．$r = 2R - N$, $n = 3R - N$ であるので，

$$r = \begin{cases} 2s & (r\text{が偶数}) \\ 2s+1 & (r\text{が奇数}) \end{cases} \quad (52)$$

と置くと，

$$n = \begin{cases} 3s + \frac{1}{2}N & (r\text{が偶数}) \\ 3s + \frac{1}{2}(N+3) & (r\text{が奇数}) \end{cases} \quad (53)$$

となり，すべてを整数 N と s で表現すると，以上のようにして決めた $\Delta(n,r)$ が $n \geq 4$ かつ $n \geq r \geq 0$ において 3 章の $\Delta(n,r)$ と一致し，その領域で $\Delta(n,r)$ が 0 と異なる値をとりうるのは $N = 0$, -2 および $N \leq -4$，すなわち r が偶数の場合には $n \leq 3r/2$, 奇数の場合には $n \leq 3(r-1)/2 - 1$ となることが分かる．

また，このようにして決めた $\Delta(n,r)$ と式 (36) で与えられる $c_r^{(n)}$ により漸化式 (45) が，少なくとも $n \leq r$ または $n-2 \geq r$ の任意の n, r に対して満たされることは明らかであり，結局は任意の n, r に対して満たされることが証明できる．

5. あとがき

拘束付き置換の総数 $U_k^{(n)}$ ($k = 3$, 4) を包含と排除の原理を用いて計算する場合に現れる $(n-r)!$ の係数 $c_r^{(n)}$ の満たすべき漸化式を導くことができた．

得られた漸化式により $k = 3$ の場合には $c_r^{(n)}$ の関数形を完全に決定することができ，しかも文献 3) で発見法的に導いた結果を系統的に導出できることが判明した．

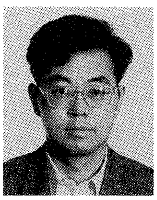
一方 $k = 4$ の場合には，$c_r^{(n)}$ は n についての r 次多項式 $c_r(n)$ およびパラメータ s についての多項式 $\Delta(n,r)$ の和で表されるが，これらの多項式の形を漸化式により定められることが分かった．すなわちこの場合にも $c_r^{(n)}$ の関数形を完全に構築することができたことになる．

我々が前回発見した $k = 3$ の場合の多項式 $c_r(n)$ の係数には無限に続くと思われる規則性が存在したが，$k = 4$ の場合にも同様の規則性が成り立つように思われる．ここで用いた方法は，特別な k の場合に生じる問題の特殊性を利用したものではない．論文では，我々の方法の有効性を $k = 3$, 4 において示したが，任意の k についても適用可能であるように思われる．

参考文献

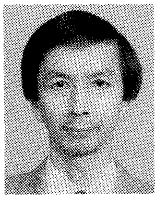
1) Hall, Jr., M.: *Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, New York (1986).
2) 山本幸一：組合せ数学，朝倉書店 (1989).
3) 緑川章一，友田敏章，堀端孝俊，李　磊：連続する 3 つの値が禁止された占有問題の一般公式，情報処理学会論文誌，Vol.37, No.11, pp.1879–1885 (1996).

(平成 9 年 9 月 16 日受付)
(平成 10 年 7 月 3 日採録)



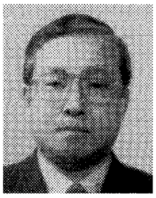
緑川　章一（正会員）

1951 年生．1979 年東北大学大学院理学研究科原子核理学専攻博士課程修了．理学博士．東京大学原子核研究所，京都大学基礎物理学研究所，理化学研究所で研究．その間，日本学術振興会奨励研究員．1994 年より青森大学工学部情報システム工学科助教授．理論物理学の研究に従事．著書「めぐる地球ひろがる宇宙」（共著，共立出版）．IEEE，日本物理学会，アメリカ物理学会各会員．



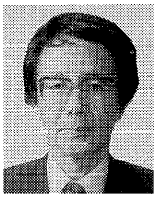
友田　敏章（正会員）

1947年生．1976年東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）．理学博士．Max-Planck-Institut für Kernphysik (Heidelberg) 客員研究員，München工科大学研究員，Paul Scherrer Institut（スイス）研究員などを経て，1992年より青森大学工学部情報システム工学科教授．原子核理論，数値解析などの研究に従事．IEEE，日本物理学会，アメリカ物理学会各会員．



堀端　孝俊（正会員）

1949年生．1980年東京都立大学大学院理学研究科博士課程修了．理学博士．東京大学原子核研究所，西独Tübingen大学研究員などを経て，日本ユニシス（株）入社，エキスパートシステム開発に従事．青森大学工学部設立準備委員会委員を経て1992年工学部情報システム工学科助教授．人工知能，原子核理論物理などの研究に従事．日本物理学会，日本応用数理学会各会員．



村岡　光男（正会員）

1929年生．1953年京都大学理学部物理学科卒業．理学博士（京都大学）．東京大学原子核研究所助手，大阪大学理学部講師，助教授を経て，1980年東京大学原子核研究所教授．1990年千葉大学教授．1995年より青森大学工学部情報システム工学科教授．1996年より同大学工学部長．著書「原子核物理学」（共著，共立出版）．日本物理学会会員．