1D－4

様相論理ＫＤ４５に対する ＢＤＤ表現

房岡 璋　三宅 祐典　奥村 淳二
立命館大学情報学科

1　はじめに

ＢＤＤは、命題論理を効率よく取り扱う方法として広く用いられており [1]、その第１階述語論理への拡張なども研究されている [2]. しかしながら、様相論理においては、すべてのモデルを２進木で数え上げることは簡単でない場合が多い. 以下では、ＫＤ４５のクラスの論理式に対して、２進木表現を与えるとともに、これらの上で論理演算、様相演算を行なう方法を考察した.

2　ＫＤ４５の標準形

ＫＤ４５では、以下のような公理が成り立っている.

K :$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

D :$\Box p \supset \Diamond p$

4 :$\Box p \supset \Box\Box p$

B :$p \supset \Box\Diamond p$

5 :$\Diamond p \supset \Box\Diamond p$

定理１．ＫＤ４５の標準形定理

ＫＤ４５の論理式は、それと等価な MDNF (Modal Disjunctive Normal Form) を持つ.

$$\varphi \equiv \bigvee_i \alpha_i \wedge$$

$$lnot\Diamond\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \neg\Diamond\beta_k^i \wedge \Diamond\gamma_1^i \wedge \cdots \wedge \Diamond\gamma_j^i$$

α_i :$p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \Rightarrow$ リテラルの論理積

$\beta_1^i \cdots \beta_k^i$:リテラルの論理積

$\gamma_1^i, \ldots, \gamma_j^i$:リテラルの論理積

証明

Ｓ５には、以下に示すような補助定理が成立ので、上記の MDNF を持つことが示されている [3].

1. $\Box p \equiv \Box\Box p$
2. $\Box\Diamond p \equiv \Diamond p$
3. $\Box(p \vee \Box q) \equiv \Box p \vee \Box q$
4. $\Box(p \vee \Diamond q) \equiv \Box p \vee \Diamond q$
5. $\Box(p \wedge q) \equiv \Box p \wedge \Box q$
6. $\Diamond(p \vee q) \equiv \Diamond p \vee \Diamond q$
7. $\Diamond(p \wedge \Box q) \equiv \Diamond p \wedge \Box q$
8. $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond p \wedge \Diamond q$

ＫＤ４５では、公理Ｔ $\Box p \supset p$ の代わりにＴより弱い公理Ｄが成立するが、以下に示すようにこの場合でも上記の MDNF は存在する.

1. $\Box p \equiv \Box\Box p$
   $\vdash \Box\Box p \supset \Diamond\Box p$　(公理Ｄ)
   $\vdash \Diamond\Box p \supset \Box p$　(公理５の対偶)
   $\vdash \Box\Box p \supset \Box p$
   $\vdash \Box p \supset \Box\Box p$　(公理４)

2. $\Box\Diamond p \equiv \Diamond p$
   $\vdash \Box\Diamond p \supset \Diamond\Diamond p$　(公理Ｄ)
   $\vdash \Diamond\Diamond p \supset \Diamond p$　(公理４の対偶)
   $\vdash \Box\Diamond p \supset \Diamond p$
   $\vdash \Diamond p \supset \Box\Diamond p$　(公理５)

３以下については、１、２を用いて証明するので、以上の補助定理はすべてＫＤ４５でも成り立つことになる.

3　等価フレーム (ef-BDD)

命題変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対する２進決定木は、変数順序を固定した場合、$\{0,1\}^n$ で与えられる. これを拡大した２進木

$\Delta = \{\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_m \mid \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_m \in \{0,1\}^n\}$

ここで $m = 2^n$

を考える. Δ のパス $\alpha_0, \alpha 1 \cdots \alpha_m$ に対して、１、０を対応させる写像 v :

$v : \Delta \rightarrow \{1, 0\}$

が、任意のパス $\alpha_0, \alpha 1 \cdots \alpha_m$ と $\alpha 1 \cdots \alpha_m$ に対するすべての置換 $\beta_1 \cdots \beta_m$ に対して、

$v(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_m) = v(\alpha_0 \cdot \beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_m)$

を満足する時、拡張された２進木 Δ と写像 v の組 (

BDD representetion of Modal Logic KD45
Akira Fusaoka,Yuusuke Miyake,Junji Okumura
Department of Computer Science Ritsumeikan Univercity

$\triangle, v)$ を等価フレーム (ef-BDD) と呼ぶ.

定理 2

命題変数 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ の上のＫＤ４５の論理式は、cf-BDD により一意に表現される.

証明

定理１より、ＫＤ４５の論理式は、

$$\varphi \equiv \bigvee_i \alpha_i \wedge \neg\Diamond\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \neg\Diamond\beta_k^i \wedge \Diamond\gamma_1^i \wedge \cdots \wedge \Diamond\gamma_j^i$$

と表現される.$\alpha_i, \gamma_1^i, \cdots \gamma_j^i$ はリテラルの積であるが、欠けている命題変数を展開することによりミニタームとしてよい.$n_j < m$ の式に対しては、$(\Diamond x_1, \cdots, x_n \vee \Diamond \bar{x_1}, x_2, \cdots, x_n \vee \Diamond \bar{x_1}, \bar{x_2}, \cdots, \bar{x_n})$ を $m - n_j$ 回乗ずることにより、$\varphi \equiv \bigvee_i \alpha_i \wedge \neg\Diamond\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \neg\Diamond\beta_k^i \wedge \Diamond\gamma_1^i \wedge \cdots \wedge \Diamond\gamma_m^i$ の形式に変形できる. ($\Diamond\gamma_1^i, \cdots, \Diamond\gamma_m^i$ は重複してもよい) 更に、ある β_r^i と γ_s^i が存在し、$\beta_r^i \supset \gamma_s^i$ となる時、この i の項は除く. 2 進木 $\triangle$ に対し、$\gamma_1^i, \cdots, \gamma_m^i$ のすべての置換 $\delta_1^i, \cdots, \delta_m^i$ に対し、

$v(\alpha_1, \delta_1^i, \cdots, \delta_j^i) = 1$

とし、それ以外は 0 とする.

作成の仕方から明らかに、この cf-BDD は、φ のすべてのモデルを含み、一意である.

この ef-BDD の一例を示す.

なお、図中の λ は可能世界の展開を表す.

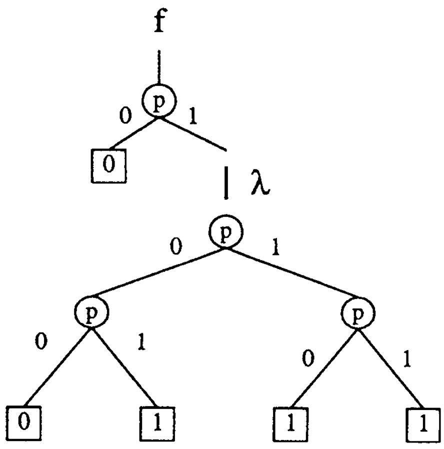

図 1: ef-BDD($f = p \wedge \Diamond p$)

4 論理演算

標準的な BDD と同様に、変数順序が同一の ef-BDD で表現された論理式に対しては、木構造の操作により、簡単に否定、論理和、論理積の命題論理演算および、様相オペレータの付加を行なうことができる.

- 命題演算

  f ·g の ef-BDD を $(\triangle, v_f), (\triangle, v_g)$ とする時、f の否定および f と g の論理和、論理積の cf-BDD、$(\triangle, v_{\neg f}), (\triangle, v_{f\vee g}), (\triangle, v_{f\wedge g})$ は、それぞれ、

  $v_{\neg f} = \neg v_f$

  $v_{f\vee g} = v_f \vee v_g$

  $v_{f\wedge g} = v_f \wedge vg$

  である.

- 様相演算

  – ◇ オペレータの付加

  $$\varphi \equiv \bigvee_i \alpha_i \wedge \neg\Diamond\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \neg\Diamond\beta_k^i \Diamond\gamma_1^i \wedge \cdots \wedge \Diamond\gamma_j^i$$

  に対し、

  $$\Diamond\varphi \equiv \bigvee_i \Diamond\alpha_i \wedge \neg\Diamond\beta_1^i \wedge \cdots \wedge \neg\Diamond\beta_k^i \wedge \Diamond\gamma_1^i \wedge \cdots \wedge \Diamond\gamma_j^i$$

  である. 従って、φ の cf-BDD を $(\triangle, v_\varphi)$ とする時、

  $if\ v_\varphi(\alpha \cdot \theta_1 \cdot \cdots \cdot \theta_m) = 1\ and\ \exists k\ \alpha = \theta$

  then $v_{\Diamond\varphi}(\theta_0 \cdot \cdots \cdot \theta_m) = 1$

  else 0

5 結び

ＫＤ４５の論理式をＢＤＤで取り扱う方法について考察した. 以上の議論は、$\Box p \supset p$ の公理を反映するように考慮することによって、Ｓ５に対しても適用できる. 今後の課題としてはまず、ここで示したＢＤＤが冗長であるので、命題論理に対するＢＤＤのように既約化の手続きが必要であることである. またＫＤ４５は信念の論理で、実際には多エージェントの場合に利用されることが多いので、これに対処するよう拡張する必要がある.

参考文献

[1] Randal E.Bryant, "Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binany-Decision Diagrams," *ACM Computing Surveys*, VOL.24,No.3 September 1992.

[2] J.Goubault and J.Posegga :"BDDs and Automated Deduction",Proc ISMIS'94,1994

[3] G.E.Hughes and M.J.Cresswell 著、三浦聡、大浜茂生、春藤修二訳 :「様相論理入門」、恒星社恒星閣、1981 年