テクニカルノート

次数5の正則結合網の提案

千葉 篤[†] 岩崎 一彦[†]
出崎 善久[†] 高岡 理[††]

本稿では次数3の正則結合網の各ノードに2本のバイパスリンクを付加して得られる次数5の正則結合網のクラスを提案する．次数と直径の積を結合網のコストとして評価を行う．提案した結合網の直径をコンピュータプログラムにより計算し，既存の結合網に対して次数と直径の積の比較を行った．その結果，実用上重要なノード数の範囲，64以上1024以下において，提案した結合網のクラスのコストが他の主要な結合網に比べて小さくなることが確認された．また，提案した結合網のルーティング法，最大連結性，拡張性についても検討した．

Regular Interconnection Networks of Constant Degree Five

ATSUSHI CHIBA,[†] KAZUHIKO IWASAKI,[†] YOSHIHISA DESAKI[†]
and OSAMU TAKAOKA[††]

In this paper, we propose regular interconnection networks of constant degree five which consist of regular interconnection networks of constant degree three and additional two by-pass links on each node. We estimate costs (diameter × degree) of the proposed networks and compare them with those of conventional networks. As a result, it turns out that the costs of some proposed networks are lower than those of other popular conventional networks for the sizes from 64 to 1024 that are usual in practical applications. Furthermore, we also examine characteristics of the proposed networks, say a routing scheme, maximal connectivity and scalability.

1. はじめに

並列処理システムを直接網により実現する場合，網のトポロジがシステムの性能に大きい影響を与えるため，それに関する研究が従来よりさかんに行われてきた[1]．結合網の評価基準としては，次数，直径，平均距離等が用いられることが多い．これらはできるだけ小さい値をとることが望まれる．また，システムの拡張性の観点からは，次数がプロセッシングエレメント（PE）の総数にかかわらず一定であることも結合網が満たすべき望ましい性質である．

本稿では，直接網の新しいトポロジとして次数5の正則結合網を提案する．提案する結合網は，2次元空間上の次数3の網上の各ノードにバイパスリンクを2本ずつ付加して得られる．そのため，ハードウェア上へ実現する際に実装上の工夫が求められる可能性があるが，次数が小さい正則結合網の性質を明らかにしておくことは，将来の並列計算機の設計者に対して資料を用意しておくという意味で有益であると考える．

2. 次数5の正則結合網の構成法

頂点数が $N \times N$（N は偶数）の格子上にノードを持つ無向完全グラフを $G_b = (V_b, E_b)$ とする．ノードの集合 V_b は $V_b = \{(x,y) : 0 \leq x \leq N-1, 0 \leq y \leq N-1\}$ と表せる．本稿で扱う結合網 $G = (V, E)$ はすべて G_b の単純部分グラフであるとする．結合網 G のサイズ $|G|$ はそれに含まれるノードの数 $|V|$ として定義される．また，a，$b \in V$ 間の距離 $d(a,b)$ は a，b 間を結ぶ最短路を構成するリンク数として定義される．ノード $a \in V$ に接続されているリンク数を a の次数 $\Delta(a)$ という．G の次数 $\Delta(G)$，G の直径 $D(G)$，平均距離 $ad(G)$ は以下のように定義される．

† 東京都立大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Tokyo Metropolitan University
†† 千葉大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Chiba University

$$\Delta(G) = \max_{a \in V} \Delta(a),$$
$$D(G) = \max_{a,b \in V} d(a,b),$$
$$ad(G) = \sum_{a,b \in V} d(a,b)/{}_{|V|}C_2.$$

G に含まれる各ノードの次数が同じ値をとるとき G は正則であるという．一般に次数と直径とはトレードオフの関係にあるので，その積 $c(G) = \Delta(G) \times D(G)$ を結合網 G の性能評価の尺度として用いる．以下，$c(G)$ を G のコストと呼ぶことにする．

正則結合網 $G = (V, E)$ に対してバイパスリンクの集合のクラス $L(G, l)$ を以下のように定義する．

$L(G,l) = \{L \subseteq E_b$: 任意の $a \in V$ に対して a に接続している L の要素がちょうど l 本存在し，$G' = (V, E \cup L)$ が正則かつ，$E \cap L = \emptyset$ が成り立つ$\}$.

既存の正則結合網 $G = (V, E)$（以下，基礎結合網ということにする）に適当な $L \in L(G, l)$ を付加することにより，新たに正則結合網 $G' = (V, E \cup L)$ が得られる．明らかに，$\Delta(G') = \Delta(G) + l$ が成り立つ．この手法を 2 次元トーラスに適用した場合の考察が文献 2) において行われている．

本稿では，次数 3 の基礎結合網より得られる次数 5 の正則結合網を提案しその性質を検討する．上で述べた方法により次数 5 の正則結合網を構成する場合，基礎結合網として次数 2，3，4 のものを選ぶことができる．基礎結合網の次数が 2（リング）の場合，基礎結合網上でのノード間の距離が長くなるのでここでは考察しないことにする．また基礎結合網として 2 次元トーラスを選んだ場合については次数が 3 の場合に比べコストが高くなることが分かっている[3)]．本稿では基礎結合網の次数が 3 の場合についての検討を行うことにする．

次数 3 の基礎結合網として様々な形状が考えられる．ここでは，その中でも比較的コストが低くなると期待される結合網として，**図 1** に示す $G_1 = (V_1, E_1)$ を考える．すなわち，

$$V_1 = V_b,$$
$$E_1 = \{(a,b) \in E_b : a_x = b_x, a_y - b_y = 1 \bmod N\} \cup \{(a,b) \in E_b : (a_x + a_y) \bmod 2 = 0, b_x = (a_x + 1) \bmod N, a_y = b_y\}.$$

ただし，$a = (a_x, a_y)$，$b = (b_x, b_y)$ である．バイパスリンク $\mathbf{L}$ を格子上のベクトルと考え，$\mathbf{L} = [x, y]$ $(-N/2 \le x, y \le N/2)$ と表す．すなわち，ノード $a = (a_x, a_y)$ に対して $\mathbf{L}$ を付加することにより a と $a' = (a_x + x \bmod N, a_y + y \bmod N)$ が接続されることになる．座標軸に対して 45° の方向にバイパスリンクを付加した場合にノード間の距離の短縮効果が大きいと考えられるので，ここではそのような場合について考察する．基礎結合網 G に 4 種類のバイパスリンクを付加して得られる結合網 $G(a, b, c, d)$ を以下のように定義する．

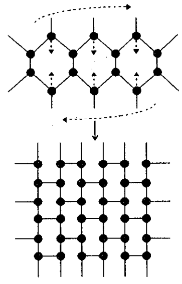


図 1 次数 3 の基礎結合網 $G_1 = (V_1, E_1)$
Fig. 1 The base network $G_1 = (V_1, E_1)$ of constant degree three.

定義 1 $G = (V, E) \subseteq G_b$ を正則結合網とする．$2 \le a \le b \le c \le d \le N/2$ を満たす偶数 a，b，c，d に対して以下の 4 方向のベクトルを考える．

$$\mathbf{L}_0 = [a, a],$$
$$\mathbf{L}_1 = [-b, b],$$
$$\mathbf{L}_2 = [-c, -c],$$
$$\mathbf{L}_3 = [d, -d].$$

G の各ノード $a = (a_x, a_y) \in V$ に以下の規則でバイパスリンクを付加して得られる結合網を $G(a, b, c, d)$ で表す．

$a_x =$ 奇数, $a_y =$ 奇数のとき $\mathbf{L}_0$,
$a_x =$ 偶数, $a_y =$ 奇数のとき $\mathbf{L}_1$,
$a_x =$ 偶数, $a_y =$ 偶数のとき $\mathbf{L}_2$,
$a_x =$ 奇数, $a_y =$ 偶数のとき $\mathbf{L}_3$. □

定義 1 で与えられた規則で張られるバイパスリンクの集合が $L(G, 2)$ に属する場合，a，b，c，d のとる値にかかわらず $G_1(a, b, c, d)$ は次数 5 の正則結合網となる．

以下では，提案した結合網のクラス $G_1(a, b, c, d)$ の性質に関する解析結果について述べる．G_1 のサイズが $4i \times 4i$ $(2 \le i \le 8)$ の範囲で，定義 1 で与えられている条件を満たすすべての a，b，c，d について $G_1(a, b, c, d)$ の直径と平均距離をコンピュータプログラムにより計算した．各サイズで直径が最小となるようないくつかの a，b，c，d の組に対して，平均距離も最小になるような a，b，c，d を求めた．その結果を，代表的な既存の結合網[2),4)]の次数，直径，コストとともに**表 1** に示す．表 1 より，提案した結合網は既存の

表1　提案した結合網と既知の結合網との比較
Table 1　Comparison of the proposed networks with conventional networks.

グラフ	サイズ	次数	直径	コスト	平均距離	a,b,c,d
$G_1(a,b,c,d)$	64	5	4	20	2.68	2,2,2,2
	256	5	5	25	3.77	4,4,6,6
	400	5	6	30	4.13	2,2,6,6
	1024	5	7	35	4.90	4,4,10,10
de Bruijn	64	4	6	24	3.45	—
	256	4	8	32	5.03	—
	1024	4	10	40	6.77	—
MSnet [2)]	64	6	4	24	2.41	—
	256	6	5	30	3.52	—
	400	6	6	36	3.80	—
	1024	6	7	42	4.61	—
RDT [4)]	1024	8	7	56	4.72	—
	4096	8	8	64	5.65	—

結合網に比べおおむね小さいコストを持っていることが分かる．特に，サイズが64や256の場合に提案した結合網のコストが最も小さくなることが分かった．

3. 提案した結合網の諸性質

(a) ルーティング法.

以下では，あるベクトル $\mathbf{v}=[v_x,v_y]$ のベクトル長 $|\mathbf{v}|$ は $(v_x^2+v_y^2)^{1/2}$ を指すものとし，結合網上の経路長（その経路上のリンク数）と区別する．定義1で与えられる4種類のバイパスリンクの間に以下の関係が成り立っている．

$$|\mathbf{L}_0| \le |\mathbf{L}_1| \le |\mathbf{L}_2| \le |\mathbf{L}_3|.$$

あるノードから別のノードへデータを送るときの経路を選ぶときに，長いリンクをできるだけ多く含むようにすることで経路長が短くなると期待される．ここではこの考え方に基づいたルーティング法を提案する．

出発地ノードを $a=(a_x,a_y)$ とし，目的地ノードを $b=(b_x,b_y)$ とする．a から b への最短ベクトルを $\mathbf{R}=[r_x,r_y]$ とする．バイパスリンク $\mathbf{L}_2$，$\mathbf{L}_3$ を用いる回数 p_2，p_3（一般に整数にはならない）は以下の式で与えられる．

$$[p_2,p_3]=\mathbf{R}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_2\\ \mathbf{L}_3\end{bmatrix}^{-1}.$$

実数 x に対して，それを超えない最大の整数，およびそれを下らない最小の整数をそれぞれ $\lfloor x\rfloor$，$\lceil x\rceil$ で表す．$[x]_k$ $(0\le k\le 1)$ を以下のように定義する．

$$[x]_k=\begin{cases}\lfloor x\rfloor & \text{if}\quad x-\lfloor x\rfloor\le k,\\ \lceil x\rceil & \text{otherwise.}\end{cases}$$

k は x を整数化するときのしきい値を表している．$\mathbf{L}_0$，$\mathbf{L}_1$ を使用する回数 p_0，p_1 は上で求めた p_2，p_3 を用いて以下のように求められる．

$$[p_0,p_1]=\left(\mathbf{R}-[[p_2]_k,[p_3]_k]\begin{bmatrix}\mathbf{L}_2\\ \mathbf{L}_3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}\mathbf{L}_0\\ \mathbf{L}_1\end{bmatrix}^{-1}.$$

上で求めた p_0，p_1，p_2，p_3 を用いてルーティング法を構成するのは容易である．出発ノードを $n_s=(x_{ns},y_{ns})$，目的ノードを $n_d=(x_{nd},y_{nd})$，現在のノードを $n=(x_n,y_n)$ とする．$G_1(a,b,c,d)$ 上を移動するルーティング法は以下のように表される．

$k \leftarrow$ 0以上1以下の適切な値;
$(x_n,y_n)\leftarrow(x_{ns},y_{ns})$;
for $i\leftarrow 0$ **to** 3 **do**
　n に付加されたバイパスリンクの種類
　$\mathbf{L}_t$ $(0\le t\le 3)$ を調べる;
　if $[p_t]_k\ne 0$　**then**
　　$(x_n,y_n)\leftarrow(x_n,y_n)+[p_t]_k\mathbf{L}_t$;
　if t=0 **or** t=2 **then**
　　$x_n\leftarrow x_n+1$;
　else if t=1 **then**
　　$y_n\leftarrow y_n-1$;
　else
　　$y_n\leftarrow y_n+1$;
$(x_n,y_n)=(x_{nd},y_{nd})$ となるまで
G_1 上の経路を移動する;

このルーティング法では必ずしも最短経路は得られない．たとえば，サイズが64から1024の範囲で，$G_1(a,b,c,d)$ にこのルーティング法を適用した場合の平均距離は，適切にしきい値 k を選んだ場合，結合網のグラフ理論的な平均距離に比べて約20～30%大きくなることが分かっている．また，このままではデッ

ドロックフリーであることは保証されないので，それに対する何らかの工夫が必要になる．

(b) 最大連結性.

連結グラフのいくつかのノードを取り除いて非連結になるような最小のノード数をそのグラフの連結度という．連結度が次数に等しくなるようなグラフを最大連結グラフという．結合網が最大連結グラフであれば，ノードフォールトがあっても非連結になりにくいという意味でフォールトトレラントであるといえる．表1において各サイズで与えられている最小コストを与える結合網中，サイズが64の場合の $G_1(2,2,2,2)$ についてのみ最大連結性が証明されている．

(c) 拡張性.

結合網の最小拡大数（minimum expand increment）とは，あるサイズの結合網にノードを付加して同じクラスのより大きいサイズの結合網を得るために必要になる最小のノード数のことをいう．ノード数 m の結合網の最小拡大数を $e(m)$ と書くことにする．ハイパキューブ，de Bruijn 網の最小拡大数はそれぞれ $e(m)=m$，$e(d^k)=(d+1)^k-d^k$ である．$G_1(a,b,c,d)$ の場合，MSnet（2次元トーラス上の各ノードに定義1と類似の規則で2本のバイパスリンクを付加して得られる結合網[3)]）と同様に $e(m)=4\sqrt{m}+4$ となること，次数がサイズにかかわらず一定であることが容易に分かる．

4. まとめ

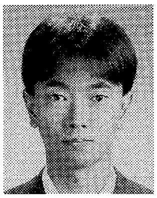
本稿では，次数5の正則結合網を提案しその性質について検討した．ここで提案した結合網は次数3の正則結合網上の各ノードに2本のバイパスリンクを付加して構成されている．適切に基礎結合網を選択することにより，ノード数が64以上1024以下の場合に，提案した結合網のコストが既存の主要な結合網と比較して小さくなることが分かった．また，簡単なルーティング法の存在を示し，最大連結性，拡張性の考察を行った．

今後の課題として，他の結合網の埋め込み可能性，網の輻輳を考慮した適応的ルーティングアルゴリズム，ルーティングアルゴリズムのデッドロックフリー性に関する考察，ブロードキャストアルゴリズム，二分割幅の考察があげられる．また，基礎結合網のサイズと付加するバイパスリンクの長さをパラメータとした場合の直径，平均距離の値を理論的に解析することも考えている．

参考文献

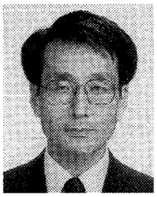
1) 天野英晴：並列コンピュータ，昭晃堂 (1996).
2) Iwasaki, K. and Furuta, A.: Mesh spiral and mesh random networks, *IEICE Trans. Information and Systems*, Vol.E79-D, No.8, pp.1093–1098 (1996).
3) 高岡　理，千葉　篤，岩崎一彦：次数5の規則的な相互結合ネットワーク，信学技報（SWoPP '96)，FTS 96-36, pp.17–24 (1996).
4) 楊　愚魯，天野英晴，柴村英智，末吉敏則：超並列計算機向結合網：RDT，電子情報通信学会論文誌（D-1)，Vol.J78-D-1, No.2, pp.118–128 (1995).

(平成10年6月9日受付)
(平成10年9月7日採録)



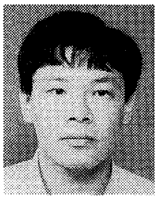
千葉　篤

昭和48年生．平成9年東京都立大学工学部電子・情報工学科卒業．現在東京都立大学大学院工学研究科に在学中．計算機アーキテクチャに興味を持っている．



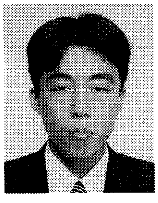
岩崎　一彦（正会員）

昭和30年生．昭和54年大阪大学大学院基礎工学研究科修士課程修了．同年（株）日立製作所入社．平成2年千葉大学工学部助教授．平成8年東京都立大学工学部教授．博士（工学)．IEEE，ACM，電子情報通信学会各会員．VLSIプロセッサの設計，計算機アーキテクチャ，フォールトトレランス技術の研究に従事．



出崎　善久（正会員）

昭和43年生．平成8年大阪大学大学院基礎工学研究科博士後期課程中退．同年東京都立大学工学部助手．博士（工学)．IEEE，電子情報通信学会．計算機アーキテクチャ等の研究に従事．



高岡　理

昭和47年生．平成9年千葉大学大学院工学研究科修士課程修了．同年テック情報システム（株）入社．在学中は並列計算機のアーキテクチャの研究に従事．