4U－7

グラフの近似彩色を行う確率アルゴリズム

菊池 淳　飯田 卓†　富田 悦次　若月 光夫

電気通信大学 電子情報学科　(† 現 QUICK システムズ)

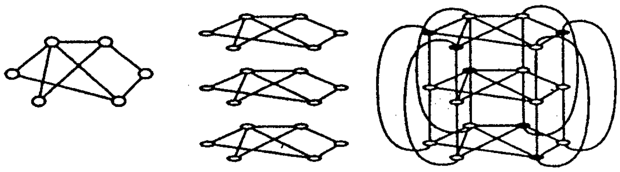
1　はじめに

エネルギー最小化原理を用いて、組み合わせ最適化問題を近似的に解く手法が幾つか研究されてきている。その中で文献 [2] では、Boltzmann Machine (BM) の概念を利用し最大クリーク抽出問題を解いている。

本稿では、このアルゴリズムの手法をグラフ彩色問題に適用し、その実験的評価を行った。

2　基本アルゴリズム RaCOLOR

基本アルゴリズム RaCOLOR とは、与えられたグラフ ($G = (V, E)$)、指定彩色数 (k)、最大イテレーション数 ($Iter$) に対して、G が k 色で $Iter$ 回以内のイテレーション数でネットワークのエネルギーが 0(k 色で G が彩色可能) になれば true、0 にならなければ false を返すアルゴリズムである。



(a)　(b)　(c)

図 1: BM の構造

ネットワークは、図 1(a) のようなグラフが与えられたとき、これと同じ構造をもつネットワークを k 層並べ (図 1(b))、更に、同じ節点に対応する異なる層間のユニット (u) をすべて結合する (図 1(c))。

このネットワークに対し、次式のようにエネルギーを規定する。

$$Energy(\mathbf{u}) = Lim1 + W \cdot Lim2$$

ただし、

$$Lim1 = \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{|V|} \sum_{i_3=1}^{|V|} (u_{i_1,i_2} \cdot u_{i_1,i_3} \cdot x_{i_2,i_3})$$

$$Lim2 = \sum_{i_1=1}^{|V|} \left| 1 - \sum_{i_2=1}^{k} u_{i_1,i_2} \right|$$

であり、x は枝、W は層内結合の重みを 1 としたときの層間結合の重みを表す。相互に結合を持ち活性化しているユニットの組が層内で多く存在する場合は $Lim1$ の値が大きくなり、層間に多く存在する場合は $Lim2$ の値が大きくなる。そのようなユニットの組が存在しない場合にのみ $Energy(\mathbf{u}) = 0$ となり、ネットワークの状態は彩色の可能解を表す。

遷移確率に関して、文献 [2] では BM における温度パラメータ (T) を固定し、緩和項というパラメータを導入している。グラフ彩色問題では、より広い解空間を探索する方が望ましいので、緩和項の代わりに活性化パラメータ (Act) を導入する。活性化パラメータとは、現在のユニットの状態にかかわらず、状態遷移確率を高くするものである。

また、アルゴリズムはその時点までのネットワークの状態の中で最もエネルギーの低いものを解として保持する。イテレーション数が $Iter$ 回になったとき、または $Energy(\mathbf{u}) = 0$ になったときアルゴリズムは停止する。ただし、1 イテレーションとは対象グラフの全てのユニットに対して状態の更新 (但し、状態遷移が受け入れられない場合も含む) を行ったときと定める。

```
function RaCOLOR(G, Iter, T, Act, W, k)
begin
  Initialize units
  while Iter > 0 do begin
    for i := 1 to k do begin
      for j := 1 to |V| do begin
        ΔE := Energy(neighbour(u_{i,j}))
                              −Energy(u)
        if ((1 + exp(−(ΔE + Act))/T)^{−1}
                              > rand[0, 1])
          then u_{i,j} := 1 − u_{i,j}
        endif
        if (Energy(u)=0)
          then RaCOLOR:=true
               exit
        endif
      end
    end
    Iter := Iter − 1
  end
  RaCOLOR:=false
end.
```

図 2: 基本アルゴリズム:RaCOLOR

A Randomized Algorithm for Approximate Graph Coloring

Jun Kikuchi　Suguru Iida

Etsuji Tomita　Mitsuo Wakatsuki

University of Electro-Communications

1-5-1 Chofugaoka,Chofu,Tokyo 182,Japan

3 実験的評価

SONY NEWS の NWS-5000WI を用いて計算機実験を行った。実験はよく対象とされる、節点数 1000、枝存在確率 0.5 の異なる 3 つのランダムグラフ[1]に対して乱数を変えて 3 回ずつ、計 9 回試行しその平均を結果とする。この様なグラフに対する彩色数は約 85 色と推定されている [1]。また、予備実験により、$T = 0.09$、$Act = 0.6$、$W = 0.9$ と定めた。

3.1 反復指定彩色法

基本アルゴリズム RaCOLOR は規模の大きなグラフに対しては可能解への収束性が良好とはいえない。そこで、本稿においては指定彩色数 k を小さくして複数回 RaCOLOR を起動して彩色を行うアルゴリズム反復指定彩色法 (RaCOLOR_it_ch) を提案する。まず、グラフ G を指定彩色数 k で彩色を行い、その出力が false ならば、彩色しきれなかった節点だけで部分グラフを構成する。次に、この部分グラフに対して再度同じ k で彩色を行い、出力が true になるまで同様の操作を繰り返す。ただし最後の部分グラフに対しては、最小の指定彩色数が得られるまで、k を 1 つずつ減らして彩色を繰り返し、出力が true となるような指定彩色数の最小値をこの部分グラフの解とする。与えられたグラフ全体の彩色数は、各段階で得られた部分グラフの指定彩色数の和とする。また、部分グラフの大きさがある程度小さくなった場合、文献 [1] による厳密解法 (CHROM_NUM) を適用する。

ここで、$k = 1$ と $k = 30$ の 2 つの場合の結果をそれぞれ表 1、2 に示す。このとき、$k = 1$ の場合は部分グラフの大きさが 50 節点以下になったときに厳密解法を適用し、$k = 30$ の場合は厳密解法は適用していない。

Iter	彩色数		実行時間 [s]	
	平均値	最小値	平均値	標準偏差
1000	92.2	91	67.3	3.3
5000	90.7	90	200.4	3.6
10000	90.3	90	371.2	8.4
50000	89.7	89	1658.4	26.1
100000	89.6	89	3268.4	18.3
500000	89.8	89	16062.3	207.9

表 1: $k = 1$

Iter	彩色数		実行時間 [s]	
	平均値	最小値	平均値	標準偏差
1000	94.0	93	62.7	1.0
5000	90.9	89	234.4	10.2
10000	90.0	89	464.5	16.7
50000	88.4	88	2192.4	59.4
100000	87.8	87	4263.7	80.2
500000	86.9	86	20629.9	420.1

表 2: $k = 30$

4 考察

$k = 1$ の場合、$Iter$ が 1000 のときに 91 色という解を抽出することが可能であったが、$Iter$ が 50000 以上としても 89 色以下に彩色数は下がっていない。これは 1 色ずつ彩色を行っていくので、ネットワークの独立節点集合の大きさが $Iter$ の増加に対しても大きな差がでないためである。

$k = 30$ の場合、$Iter$ が小さいときには $k = 1$ の場合より精度は落ちるが、$Iter$ が大きくなるにつれて精度は上がり、$Iter$ が 10000 以上になると $k = 1$ の場合より精度が上がる。$Iter$ が小さいときに精度が悪いのは、90 色分彩色した時点で 10 節点程度の部分グラフが彩色しきれないものとして残ってしまい、その部分グラフに対する彩色数が 4 色程度となるため、全体の彩色数が約 94 色となるためである。しかし、$Iter$ が大きいときは、3 回目の RaCOLOR による $k = 30$ の出力が true となり、この部分グラフの最小の彩色数は 26 色程度となるため、全体の彩色数が約 86 色という解が得られる。

[1] 実枝存在率 graph1:0.499046, graph2:0.500560, graph3:0.499536

5 おわりに

BM の概念を利用し、グラフ彩色問題を近似的に解く基本アルゴリズム RaCOLOR を提案した。対象グラフにおいて、RaCOLOR_it_ch では、1 色ずつ彩色することで、約 1 分で 91 色という近似解を抽出することができた。また、30 色ずつ彩色することで、約 5.5 時間で 86 色という近似解を抽出するができた。

謝辞 御協力・討論頂いた本学大学院生の奥田達哉氏、樋口健氏に感謝致します。

参考文献

[1] David S.Johnson, Cecilia R.Aragon, Lyle A.Mcgeoch and Catherine Schevon, "Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; Part II,Graph coloring and number partitioning", *Operations Resarch*, vol. 39, no.3 (May-June 1991).

[2] 山田義朗, 富田悦次, 高橋治久, "近似最大クリークを抽出する確率アルゴリズムとその実験的評価", 電子情報通信学会論文誌, vol. J76-D-I, no.2, pp. 46–53 (1993).