3U－1

不適格路除去法による巡回セールスマン問題の解法

松本　和久　神戸大学教育学部
竹内　康滋　神戸大学発達科学部

1.はじめに

「巡回セールスマン問題」(以下、TSP という）について、最も基本的な解法は、ハミルトン閉路の長さをすべて検証する方法である。この方法の欠点は、頂点の数が n のとき、ハミルトン閉路の数が $(n-1)!/2$ 通りあり、ハミルトン閉路の長さをすべて計算するには指数時間を要することにある。最小の長さを持つハミルトン閉路を見つけるのに、実際には、長さを求める必要のないハミルトン閉路が数多く存在する。それらのハミルトン閉路の長さの計算を省くことによって、多項式時間にまで計算量を減らすことは無理としても、より多くの頂点をもつ TSP を解くことが出来るようになる。[1]

2.順列の構成

TSP において、長さ最小のハミルトン閉路を見つけるために、長さの計算が不要なハミルトン閉路の検証は数珠順列の構成法に基ずく。その構成法を以下に示す。

以下、k は $k>1$ なる整数とする。

定義　有限項の整数の数列 $p_1,p_2,\ldots,p_k$ で、各項が $0\leqq p_i\leqq k-i,\ (i\neq k-1)$ および $p_{k-1}=0$ を満たすものを**原始列**と呼ぶ。

[1] A solving method by eliminating unfit pathes for the traveling salesperson problem
by Kazuhisa Matsumoto and Yasuji Takeuchi
Kobe University

定義　有限項の自然数の数列 $q_1,q_2,\ldots,q_k$ で、各項が $1\leq q_i\leq k-i+1,\ (i\neq k-1)$ および $q_{k-1}=1$ を満たすものを**順序列** と呼ぶ。

項数 k が同じならば,原始列と順序列のそれぞれの総数はともに $k!/2$ 個で一致する。そこで、同じ項数 k の原始列と順序列とを以下のように１対１に対応させる。

$$\begin{cases} p_i=0\text{のとき} & q_i=k-i+1 \\ p_i\neq 0\text{のとき} & q_i=p_i \end{cases}$$

ただし、$i=1,2,\ldots,k$ である。

項数 $n-1$ の順序列から次のような手順で、$1,2,\ldots,n$ の順列を構成する。ただし、$n>2$ である。

横一列に並んだ n 個の空箱を考える。まず左端の箱に 1 を入れる。以下、箱を数える順番は左端から数えるものとする。次に空いている箱の q_1 番目に n を入れ、次に空いている箱の q_2 番目に $n-1$ を入れる。以下同様に $n-2,n-3,\ldots,2$ と番号の数の大きい順に箱に入れていく。その結果、$1,2,\ldots,n$ を並べた順列ができあがる。この順列において、並んでいる数字を左から順に $r_1,r_2,\ldots,r_n$ とする。r_1 と r_n が隣り合っていると考えて、これを円順列と見なす。どんな原始列に対しても $r_1=1$ だから、この順列を円順列と見なしても、異なる原始列に対応する円順列が一致することはない。このようにして原始列から円順列を構成することができる。ここで、項数が

$n-1$ のどんな順序列 $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ に対しても、それに対応する原始列の第 $n-2$ 項の値は常に 0 であるから、$q_{n-2}=2$ となる。よって、上記の手順で構成した順列について、$r_i=2, r_j=3$ なら、$i<j$ が成立する。また、$r_1=1$ であことから、原始列から構成した順列をすべて考えると、それらは $1,2,\ldots,n$ の数珠順列すべてになる。

3．不適格経路除去法

以下において、n 個の頂点をもつ TSP において、頂点を $1,2,\ldots,n$ とし、それらを都市名と考える。$1,2,\ldots,n$ の数珠順列と都市1から都市 n の n 都市のハミルトン閉路とを同一視する。

定義 n 都市のハミルトン閉路（数珠順列）に対して、その数珠順列における隣接する都市間の重みの総和を**巡回距離**と呼ぶことにする。

定義 n 都市のハミルトン閉路に対して、そこから $k+1, k+2, \ldots, n$ を取り除き、$1,2,\ldots,k$ の順序を保存した $1,2,\ldots,k$ のハミルトン閉路を考える。このハミルトン閉路の巡回距離を元のハミルトン閉路の k **部分距離**と呼ぶことにする。

補題 2 つの順列 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ と $r'_1, r'_2, \ldots, r'_n$ において対応する原始列をそれぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ と $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ とする。このとき、$p_i=p'_i$, $(n-k+1 \leq i \leq n-1)$ を満たすならば、両順列において、$1,2,\ldots,k$ の並ぶ順序は一致している。

証明 2つの順列は、それぞれに対応する原始列の第1項から第 $n-k$ 項まで項の値によって $n, n-1, \ldots, k+2, k+1$ が入る空箱が決まる。$2,3,\ldots,k$ を残りの空箱に入れる順番もそれぞれに対応する原始列の第 $n-k+1$ 項から第 $n-1$ 項までの項の値によって決まり、これらは仮定からすべて一致しているので、それぞれに残った空箱に $2,3,\ldots,k$ を入れる順番は同じである。また、1の入る場所は定義よりどの原始列でも初項である。よって、主張が示された。

定理 都市の集合 $1,2,\ldots,n$ のハミルトン閉路（数珠順列）$r_1, r_2, \ldots, r_n$ を考える。このハミルトン閉路の巡回距離の k 部分距離が値 v を越えたとする。順列 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ に対応する原始列を $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ とする。任意のハミルトン閉路に対応する原始列の第 $n-k+1$ 項～第 $n-1$ 項が、それぞれ $p_{n-k+1}, \ldots, p_{n-1}$ に等しいとき、このハミルトン閉路の巡回距離は v を越える。

証明 原始列の第 $n-k+1$ 項～第 $n-1$ 項の項がすべて一致しているから補題より対応する順列において、$1,2,\ldots,k$ の順序は一致する。従って、それぞれの k 部分距離は一致し、かつ v を越える。従って、結論が示された。

この定理によりすべての原始列について対応するハミルトン閉路の巡回距離を計算・比較していくとき、ある原始列に対応するハミルトン閉路のk部分距離がそれまで計算した巡回距離の最小値を越えるならば、定理からその原始列の第 $n-k+1$ 項～第 $n-1$ 項がすべて等しい原始列に対応する巡回距離はその最小値を超えるので、それらの巡回距離の計算を省くことができる。

この定理を用いて TSP を解くときには、巡回距離の最小値の近似値をまず求めることから始める。

《参考文献》

1)　日本工業技術振興協会編; ニューロコンピューティングの基礎理論, 海文堂, 1991

2)　C.L. リュー; 離散数学入門、マグロウヒル、1992