

## 特異値分解によるCT像再構成と GCVによる最適化

寺崎 奈緒美、寺西 大、岩間 尚文  
富山県立大学工学部

2Q-2

### 1. はじめに

疎データのCT問題を取り扱う。線形回帰モデルに基づき、評価関数を導入して代数学的な方法で画像を求める。今回はTikhonov-Phillips型の評価関数を利用して線形解法で高速に解を出すを試みる。同様に、正則化の度合いを左右するパラメータの最適化基準としてAICと類似の負エントロピーGCVを使う。本研究ではプラズマの小型トカマクの放射型CTを取り上げて、再構成法の手法を検証する。

### 2. 像再生の手法

データと求める像の間には次のような線形回帰モデルを想定する。

$$S = LE + e \quad (1)$$

データ数  $M$ 、画素数  $K = K_x \times K_y$

$S$ :  $(M \times 1)$  データベクトル

$E$ :  $(K \times 1)$  画像ベクトル

$L$ : 測定系により決まる係数行列

$e$ :  $(M \times 1)$  誤差ベクトル

$L$ を既知として、データ $S$ から未知量 $E$ を求める逆問題を考える。但し、測定量 $S$ には誤差 $e$ が含まれていると考え、平均二乗誤差

$$\epsilon^2 = \|e\|^2 / M = \|S - LE\|^2 / M \rightarrow \text{最小} \quad (2)$$

を最小にする解(最小二乗解)を求める。しかし、問題点として一般的にデータ数 $M <$  画素数 $K$ の場合、解は不定で一意には決まらない。そこで解( $E$ )を一意に決める方法として $\epsilon^2 =$ 一定の制約条件をつけて、評価関数 $\|CE\|^2$ を最小にする解を採用する(正則化法)。すなわち

$$\Phi = \|S - LE\|^2 / M + \gamma \|CE\|^2 \rightarrow \text{最小} \quad (3)$$

$\gamma$ : ラグランジュ未定乗数の逆数  
(正則化のパラメータ)

Phillips正則化法では像の2階微分の二乗積分を評価関数に採用するので、 $C$ はラプラシアンを表す行列となり、Tikhonov正則化法では像の二乗積分を評価関数に採用するので $C$ は単位行列となる。ここで像再生の問題は $\Phi$ の最小化問題を解く事に帰着し、解は次式のように与えられる。

再生像

$$E(\gamma) = (L^t L + M \gamma C^t C)^{-1} L^t S \\ = \sum_{j=1}^M w_j(\gamma) [(u_j \cdot S) / \sigma_j] (C^{-1} v_j) \quad (4)$$

$$w_j(\gamma) = (1 + M \gamma / \sigma_j^2)^{-1} \quad (5)$$

ここで $\sigma_j$ は $LC^{-1} = U \Sigma V^t$ と特異値分解した時の特異値 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M \geq 0$ 、 $u_j$ 、 $v_j$ は直交行列 $U$ 、 $V$ の列ベクトルで、 $u_j$ と $C^{-1} v_j$ はそれぞれ $S$ と $E$ に対する基底ベクトルである。

$(u_j \cdot S) / \sigma_j$ は、いわばフーリエ空間における逆問題の解であり、そこに $(C^{-1} v_j)$ なる基底画像を引っかけて再生像を合成する。又、 $w_j(\gamma)$ は高周波成分を切り落とす為の窓関数であり、 $\sigma_j \neq 0$ のフーリエ領域における雑音増幅を抑制するWienerフィルターの役割を果たす。このように特異値分解を利用する事により、再生像の式から逆行列が消え、高速計算が可能になる。次に、 $\gamma$ 値の選択基準としてGCVを導入する。

### 3. GCV

GCVは次式のように書ける。

$$GCV(\gamma) \\ = \epsilon^2(\gamma) / (1 - M^{-1} \text{Tr} A(\gamma))^2 \\ = \epsilon^2(\gamma) / (1 - M^{-1} \sum_{j=1}^M w_j(\gamma))^2 \quad (6)$$

ここで $A(\gamma)$ は再生投影データ $S(\gamma)$ と $S$ とを結びつける行列である。

$$S(\gamma) = A(\gamma) S \quad (7)$$

$\gamma$ 値を小さく選び、 $A(\gamma)$ が対角行列に近付くと $S_k(\gamma)$ はほとんど $S_k$ だけに支配され(6)式の分母は0に近付く。その結果、 $\epsilon^2(\gamma)$ の減少が相殺され

GCV( $\gamma$ )が上昇する。再生投影データ $S(\gamma)$ が、誤差を含んでいる $S$ に近付きすぎるのを良しとしないAICの第2項に相当する罰点である。GCV最小の $\gamma$ 値を最適値とみなす。

4. 再生結果

名大工学部小型トカマクCSTN-Ⅲの $H\alpha$ 線放射型CT装置図を図1に、特異値の並びを図2に示す。

又、図3にPhillips正則化法による再生像、GCV,  $\epsilon^2(\gamma)$ の $\gamma$ 依存性を示す。データ数 $M=600$ 、画素数 $K=30 \times 30$ で像再生を行った。GCVは $\gamma=1.0D-2$ で最小値を取り、合理的な振る舞いをしている。基底画像( $C^{-1}v_j$ )の様子を図4に示す。図4からは基底画像が低周波成分から高周波成分へ移っていく様子がわかる。計算は倍精度で行った。

5. 終わりに

疎データからの像再生法として線形正則化法をプラズマ像に適用した。又、 $\gamma$ の基準としてGCVを導入し合理的な結果が得られた。今後は線形正則化法を幅広い対象に適用し、像再生の成否とフーリエの係数との関係などを調べる事が課題となる。

謝辞

データを提供頂いた名大工学部 高村秀一教授に謝意を表します。

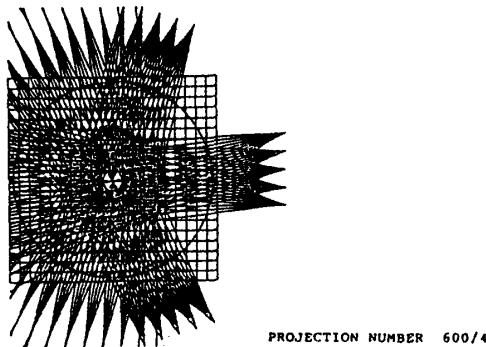


図1 プラズマ測定装置CSTN-Ⅲ (視線配置図)

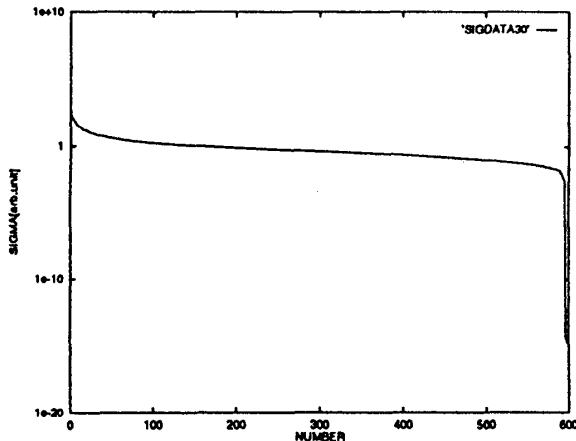


図2 特異値の並び

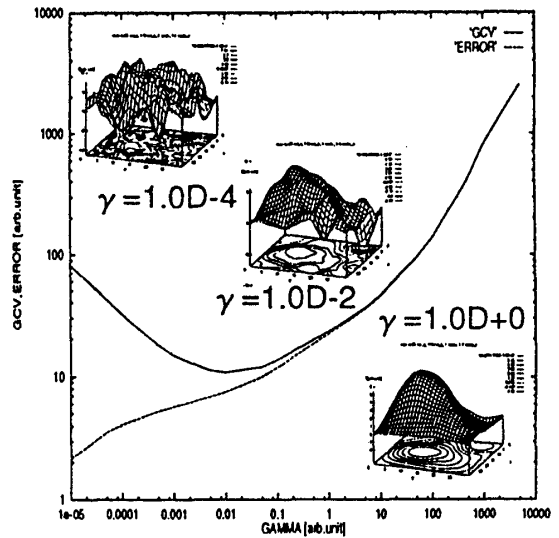
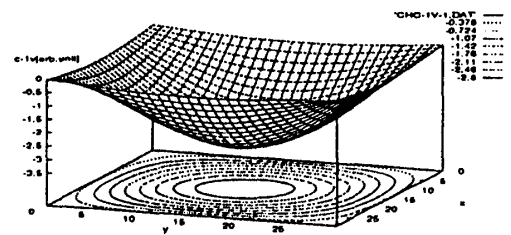
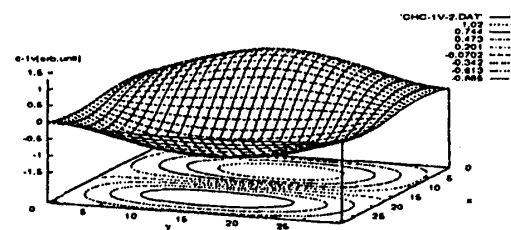


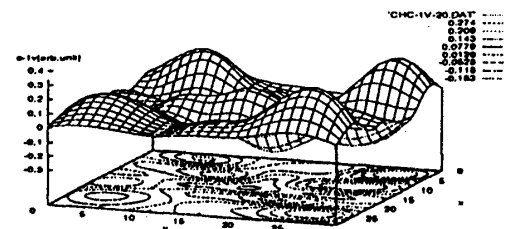
図3 再生像、GCV,  $\epsilon^2(\gamma)$ の $\gamma$ 依存性  
データ数 $M=600$ 、画素数 $K=30 \times 30$



(a)



(b)



(c)

図4 基底画像( $C^{-1}v_j$ )の推移  
(a)  $j=1$ の場合 (b)  $j=2$ の場合 (c)  $j=20$ の場合