4C−2

相関論理Rcにおける連言-含意のパラドクスおよび選言-含意のパラドクスの証明不可能性について

大堀 順也　程 京徳　牛島 和夫
九州大学工学部

1 はじめに

帰結関係、あるいは十分条件関係「もし... ならば」は、人間の思考において中心的な役割を果たしている。十分条件関係の真理値あるいは妥当性は、前件と後件の真理値によってだけでなく、むしろ前件と後件の必然的相関関係によって決められるべきである[1]。

古典数理論理では実質含意という真理値関数を用いて十分条件関係を表現しているため、その公理と論理定理に実質含意に関するパラドクスが多数内在している。相関論理は、"AやBの真偽を知ることなく$A \rightarrow B$の真を知ることができる"というWright-Geach-Simpley基準に基づいて、十分条件関係のより自然な形式化のために構築された論理である。このような論理体系としては、AndersonとBelnapの体系TとEとRが最も良く知られている[1]。これらの論理体系の特徴は、十分条件関係を自然に表現する内包的な基本論理結合子をもっていて、論理定理が実質含意に関するパラドクスを持たないということである。

相関論理は実質含意に関するパラドクスを持っていないため知識の表現と推論にとって適切なものと思われていた。しかし、近年になって実質含意のパラドクスとは別のパラドクスを持っていることが指摘された。それは連言−含意パラドクスおよび選言−含意のパラドクスと呼ばれるものである。例えばTやRやEなどの論理体系の論理定理として存在する$A \land B \rightarrow A$について、前件に、後件Aの真偽に何の関係もないBが連言項として存在している。この場合、Bについては何の制約もなく、後件Aの否定である$\neg A$であってもかまわない。$A \land B \rightarrow A$を妥当な論理定理とすれば、

"雪は白く、かつ1+1=2であるならば、雪は白い"
"雪は白く、かつ1+1=3であるならば、雪は白い"
"雪は白く、かつ雪は白くないならば、雪は白い"

のようなものを妥当な十分条件関係と認めざるをえなくなってしまう。従来の相関論理にある典型的な連言−含意、および選言−含意に関するパラドクスには、$(A \land B) \rightarrow A$、$(A \land B) \rightarrow B$、$A \rightarrow (A \lor B)$、$B \rightarrow (A \lor B)$、$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \land C) \rightarrow B)$、$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \lor C))$などがある。

On the Invalidity of Conjunction-Implicational and Disjunction-Implicational Paradoxes in Relevant Logic Rc.
Junya Ohori, Jingde Cheng, and Kazuo Ushijima
Faculty of Engineering, Kyushu University

相関論理Rcは連言−含意および選言−含意のパラドクスを持たない論理体系として提案され、相関論理Rを改良したものである[2, 3]。Rcの公理と推論規則は以下のとおりである。

Rcの公理図式

Rc01 $A \rightarrow A$
Rc02 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$
Rc03 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Rc04 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
Rc05 $(A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow (\neg A))$
Rc06 $(\neg (\neg A)) \rightarrow A$
Rc07 $(A \land A) \rightarrow A$
Rc08 $(A \land B) \rightarrow (B \land A)$
Rc09 $((A \rightarrow B) \land (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \land C))$
Rc10 $(A \land (A \rightarrow B)) \rightarrow B$

Rcの推論規則

R1 Modus ponens : Aと$A \rightarrow B$からBを得る
R2 Adjunction : AとBから$A \land B$を得る

本論文はRcにおいて上記の連言-含意のパラドクスおよび選言-含意のパラドクスが証明不可能であることを示す。

2 方法

まず背景となる原理を述べる。

1. ある論理体系Sの全ての公理はある性質Pを持つ。
2. Sの全ての推論規則において前提が性質Pを持てば、結論も性質Pを持つ。
3. ある論理式Aは性質Pを持たない。

上の1〜3を満たす性質Pが見つかれば、AがSの論理定理ではない、つまりAがSにおいて証明不可能であることがいえる。なぜなら1と2よりSにおいて導かれる全ての論理定理は、性質Pを持つことが構造帰納法により保証されるからである。以下、'論理式が性質Pを持つ'ということを、'論理式が行列モデルを満足する'ということと考える。

では、論理式が行列モデルにおいてどのように解釈されるかを述べる。まず論理式の各変数に行列モデルの要素$0, 1, 2, ..., n$のどれかを代入する。次に行列モデルの各結合子に対する解釈行列にしたがって論理式の値を計算していく。最終的には、解釈結果は行列モデルの要素のどれかになる。

定義： ある論理式の各変数へ、どのように行列モデルの要素を代入しても解釈結果がdesignated valueに

なるときその論理式は行列モデルを満足するという。

以下、具体例として (A ∧ B) → A が Rc において証明不可能であることを示す行列モデルを示す。以下の例では designated value を * で示すことにする。

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 1 \quad B = 2$$

1. Rc の全ての公理は上の行列モデルを満足する。すなわち公理は、各変数へどのように要素を代入しても解釈結果が designated value (1 or 2) になる。
2. 推論規則は前提が designated value であれば結論も designated value である。例として Modus Pones がそのようなになっていることを示そう。
   (a) $A = 1; A \to B = 1$ のとき $B = 1$ である。
   (b) $A = 1; A \to B = 2$ のとき $B = 2$ である。
   (c) $A = 2; A \to B = 1$ となる場合はない。
   (d) $A = 2; A \to B = 2$ のとき $B = 2$ である。
3. さらに (A ∧ B) → A は $A = 1; B = 2$ のとき、(1 ∧ 2) → 1 = 2 → 1 = 0 だから上の行列モデルを満たさない。

1 〜 3 より (A ∧ B) → A が Rc において証明不可能であることを示せた。

このような行列モデルを生成する手助けとして相関論理の代数的モデル自動生成システム MaGIC を使った[4]。

3 結果

以下、(A ∧ B) → A 以外の連言 - 含意のパラドクスおよび選言 - 含意のパラドクスが Rc において証明不可能であることを示す行列モデルを示す。

(A ∧ B) → B について:

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 2 \quad B = 1$$

A → (A ∨ B) について:

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 1 \quad B = 0$$

B → (A ∨ B) について:

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 0 \quad B = 1$$

(A → B) → ((A ∧ C) → B) について:

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 1 \quad B = 1 \quad C = 2$$

(A → B) → (A → (B ∨ C)) について:

→	0	1	2
0	2	2	2
1*	0	1	2
2*	0	0	2

∧	0	1	2
0	0	0	0
1*	0	1	2
2*	0	2	2

a	0	1*	2*
$\neg a$	2	1	0

$$A = 1 \quad B = 1 \quad C = 0$$

4 おわりに

我々は Rc と同様に E を改良した論理体系 Ec、T を改良した論理体系 Tc においてもそれぞれ、連言 - 含意のパラドクスおよび選言 - 含意のパラドクスが証明不可能であることも本論文で述べた方法で確認した。

謝辞

MaGIC を提供していただき、その使い方に関して助言をしていただいたオーストラリア国立大学の John Slaney 氏に深く感謝する。

参考文献

[1] A.R.Anderson and N.D.Belnup Jr.: "Entailment: The Logic of Relevance and Necessity," Vol.1.Princeton University Press , 1975.

[2] J.Cheng: "Rc - A Relevant Logic for Conditional Relation Representation and Reasoning," Proc. 1st Singapore International Conference on Intelligent Systems, pp.171-176, Singapore. September 1992.

[3] J.Cheng: "A Relevant Logic Approach to Modeling Epistemic Processes In Scientific Discovery," Proc. of 3rd Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence, Vol.1, pp444-450, Beijing, China, August 1994.

[4] John Slaney and Gustav Meglicki: "MaGIC Version 2.0: NOTES AND GUIDE," Automated Reasoning Project, Australian National University, 1991.