ウェーブレット係数のユニタリ行列表現とその応用について

1C－1

中島俊哉
富士通(株)

1 はじめに

離散データのウェーブレット変換において通常用いられるコンパクトサポート(cs)直交関数系は一連の Daubechies 関数 (サポート長 $2N-1(N=1,2,..)$, $N-1$ 次までのモーメントが 0. 以下 DN と略) であるが，応用によっては DN とは異なる性質の cs 直交ウェーブレット関数が必要になる場合がある．

本稿ではスケーリング関数とウェーブレット関数が満たす関数方程式の係数 (両者を便宜的にウェーブレット係数と呼ぶ) から成る行列がユニタリ行列の組合せに分解されることを示し，その結果非 DN 系関数の探索に有用なパラメタ表現を得る．次にこの応用としてサポート長 $3(N=2)$ で 2 次 (および 0 次) モーメント 0 の直交ウェーブレット関数を求めその連続性を評価する．

2 ウェーブレット係数のユニタリ行列表現

スケーリング関数 $\phi(x)$ とウェーブレット関数 $\psi(x)$ の関係式 $\phi(x)=\sum_{k=0}^{2N-1}\alpha_k\sqrt{2}\phi(2x-k)$, $\psi(x)=\sum_{k=0}^{2N-1}\beta_k\sqrt{2}\phi(2x-k)$ と Mallat アルゴリズムの分解・再構成式および周期境界条件から，

$$\begin{bmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{bmatrix} = G^H c_j\ ,\quad c_j = G\begin{bmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{bmatrix}\ ,$$

$G=[\alpha\ P\alpha\ \cdots P^{N-1}\alpha\ |\ \beta\ P\beta\ \cdots P^{N-1}\beta\ ]$, $P=\begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_{2N-2} & 0 \end{bmatrix}$; I_n は n 次単位行列; H は転置共役; α,β はウェーブレット係数ベクトル; c_j, d_j は各々 $\phi(x),\psi(x)$ による展開係数ベクトル; j は多重解像度解析のレベル ($j\to\infty$ で $L^2(R)$); を得る．

Unitary Matrix Decomposition of Wavelet Coefficients and its Application
Toshiya Nakajima
Fujitsu Ltd.
9-3,Nakase 1-chome,Mihama-ku,Chiba-shi,
Chiba 261,Japan

以上により G はユニタリである．したがって $[\alpha\ \beta]\equiv\Gamma$; P の対角化ユニタリ行列を U; $U\Gamma\equiv T=[T_1^H\cdots T_N^H]^H$; $T_i\ (i=1,..,N)$ は 2×2 行列; とおけば，G: ユニタリの条件により $\sqrt{N}T_i\equiv S_i$ がユニタリになることがわかる．これにより ω を 1 の原始 N 乗根; $\omega I_2\equiv\Omega$ とすれば Γ は次式になる．

$$\Gamma=\frac{1}{N}\,\Theta\,[S_1^H\cdots S_N^H]^H \qquad (2.1)$$

$$\Theta=\begin{bmatrix} I_2 & I_2 & \cdots & I_2 \\ I_2 & \Omega & \cdots & \Omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_2 & \Omega^{N-1} & \cdots & \Omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

ここで明らかに $\frac{1}{\sqrt{N}}\Theta$ はユニタリである．

次に Γ がウェーブレット係数行列であるための最小限の条件として，正規直交性と 0 次モーメント 0 の条件を S_i に課する．以下 $N=2$ とする．$\Gamma=[\Gamma_1^H\ \Gamma_2^H]^H$ とおけば正規直交条件は $\Gamma^H\Gamma=I_2$ および $\Gamma_1^H\Gamma_2=0$ となるが前者は (2.1) により成立するから，後者を S_1, S_2 で表せば $S_2=AS_1$ となる．ここで A は任意のユニタリかつエルミートの行列である．一方，0 次モーメント条件 $\sum_{k=0}^{2N-1}\alpha_k=\sqrt{2}$, $\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\alpha_k=0$ を (2.1) に適用すれば，S_1 がユニタリであることとあわせて，

$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & e^{iu} \\ 1 & -e^{iu} \end{bmatrix}$; $u\in R$ を得る．

以下実数のウェーブレット係数を対象にし，$u=0$; S_1,S_2,A は実行列とする．このとき A は任意の直交対称行列であるから S_2 は任意の回転行列になる．結局，$\theta\in R$ をパラメタとして，cs 直交ウェーブレット関数は，

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

を用いて導出されることになる．ここで $D2$ は $\theta=5\pi/12,\ 13\pi/12$ の場合に対応する．

3　非 DN 関数の例と連続性

前節で求めた S_1, S_2 のパラメタ表記により, $[0, 2\pi)$ の範囲の探索でサポート長3の各種の非 DN 関数を求めることができる. その例として2次(および0次)モーメント0のウェーブレット関数を図1, 図2に示す(スケーリング関数は省略).

一方, θ によっては不連続関数になる場合があるが, 連続関数であるための必要十分条件は $r(P,Q) < 1$ で表される [1][2]. ここで P, Q はサポート長3の場合 2×2 行列で, $p_{11} = \alpha_0^* = -q_{12}$, $p_{12} = 0 = q_{21}$, $p_{21} = -\alpha_3^* = -q_{22}$, $p_{22} = 1-\alpha_0^*-\alpha_3^* = q_{11}$, $\alpha_i^* = \sqrt{2}\alpha_i$ であり, $r(P,Q)$ は P, Q の結合スペクトル半径 [3] を表す. ただし $r(P,Q)$ の値を一般の場合に計算するのは困難である.

ここでは, 図1, 2の関数に対して $r(P,Q)$ の上下界を求める. $r(P,Q)$ の定義は,

$$r(P,Q) = \limsup_{n\to\infty} \max_{R_i = P,Q} \|\prod_{i=1}^{n} R_i\|^{1/n}$$

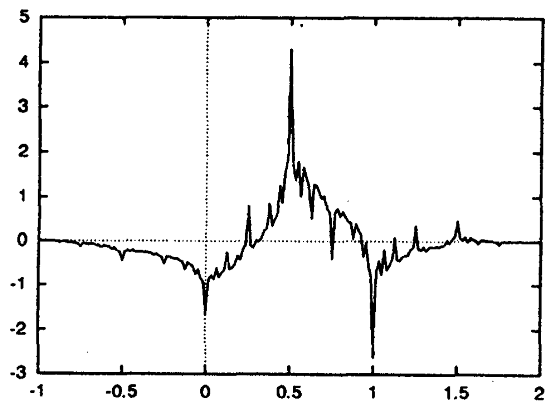

図1 ($\theta \cong 1.898$)

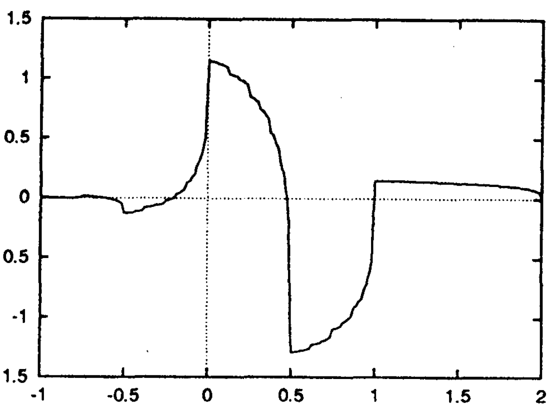

図2 ($\theta \cong 3.670$)

であるが, $\|P\|_1 = \|Q\|_1$ により上界の計算には1-ノルムを用いる. このとき上界は,

$$\begin{aligned} r(P,Q) &\le \limsup_{n\to\infty} (\|P\|_1^{n-m}\|Q\|_1^{m})^{1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|P\|_1^{n(1/n)} \\ &= \max(|\alpha_0^*| + |\alpha_3^*|,\ |1-\alpha_0^*-\alpha_3^*|) \end{aligned}$$

となる $(m = 0, .., n)$. また下界は次式になる.

$$\begin{aligned} r(P,Q) &\ge \limsup_{n\to\infty} \max(\|P^n\|^{1/n}, \|Q^n\|^{1/n}) \\ &= \max(r(P), r(Q)) \\ &= \max(|\alpha_0^*|,\ |\alpha_3^*|,\ |1-\alpha_0^*-\alpha_3^*|) \end{aligned}$$

ここで $r(P), r(Q)$ は P, Q のスペクトル半径を表す.

以上の上下界を図3に示す. ただし $\theta \in [\pi/4,\ 5\pi/12] \cup [13\pi/12,\ 5\pi/4]$ の範囲では $r(P,Q)$ は下界に等しい [2]. $\theta \in [\pi/2,\ \pi]$ の範囲では上下界が一致する. また $\theta = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4$ は Haar 関数に対応する.

図3により, 図1,2の関数はいずれの θ に対しても $r(P,Q) < 1$ であり, したがって連続関数になることがわかる.

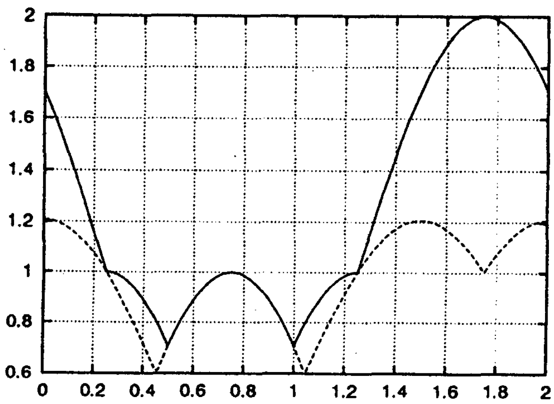

図3　$r(P,Q)$ の上下界 (横軸 : θ/π)

[1] Colella, D. and Heil, C., Characterizations of Scaling Functions: Continuous Solutions, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.15, No.2, 1994, pp. 496-518.

[2] Heil, C. and Colella, D., Dilation Equations and the Smoothness of Compactly Supported Wavelets, in Wavelets: Mathematics and Applications, Benedetto, J. and Frazier, M. (eds.), CRC Press, 1994, pp. 163-201.

[3] Rota, G.-C. and Strang, G., A Note on the Joint Spectral Radius, Indagationes Mathematicae, 1960, pp. 379-381.