5B－8

Fuzzy論理関数及び正則3値論理関数の数の限界式の改良

巽　久行†,　荒木　智行†,　向殿　政男††
† 神奈川工科大学　　†† 明治大学

1．まえがき

Fuzzy論理関数及び正則3値論理関数の数を求めることは，ある特殊な有限分配束の元の数を求める問題に等しく，2値論理関数の場合とは異なり極めて困難である（例えば，*n*変数のFuzzy論理関数の数は生成元*n*の自由Kleene代数の元の数に等しく，また，正則3値論理関数の数は中心を持った上記代数の元の数に等しい）。これまで報告されたこれらの論理関数の数における最も良い限界式は，著者らの知る限り，文献[1][2]で示された式である。

本報告は，上記文献で用いられた方法と同様に，これらの論理関数の数え上げ問題を2値論理関数を表現する加法形式の数え上げ問題に帰着させて限界式を求めているが，2値論理関数を表現する加法形式の数の上界及び下界を改良することで，上記文献よりさらに良い式が得られたので，これについて報告する。

2．数え上げにおける諸性質

本節では，限界式を求める際に利用する諸性質を，必要最小限に留めて列挙する。

変数の集合を $X=\{x_i \mid i=1,\cdots,n\}$，2つの定数の集合を $C_f=\{0,1\}$ および $C_r=\{0,1/2,1\}$ とする。

[定義2.1] Fuzzy論理関数とは，Xの要素と C_f の要素を論理演算 AND(•)，OR(∨)，NOT(~) で結合した論理式で表現される $[0,1]^n$ から $[0,1]$ への関数である。Fuzzy論理関数には，次の2種類の積項がある。(FP1)いくつかの重複しない文字の積(AND)で，肯定，否定とが同時に現れない積項として単積項 (FP2)少なくとも1つの変数について肯定と否定が同時に現れるような文字の積(AND)である相補積項。特に，すべての文字が現れる相補積項を相補最小項という。 □

[定義2.2] 正則3値論理関数とは，Xの要素と C_r の要素を論理演算 AND(•)，OR(∨)，NOT(~) で結合した論理式で表現される $\{0,1/2,1\}^n$ から $\{0,1/2,1\}$ への関数である。正則3値論理関数には，次の3種類の積項がある。(RP1)いくつかの重複しない文字の積(AND)で，肯定，否定とが同時に現れない積項として単積項 (RP2)定数1/2を含み，肯定，否定とが同時に現れない積項として1/2単積項。特に，すべての変数を含むものを1/2最小項と呼ぶ。(RP3)少なくとも1つの変数について肯定と否定が同時に現れるような文字の積(AND)である相補積項。特に，すべての文字が現れる相補積項を相補最小項という。 □

以上の定義において論理演算•，∨，~はそれぞれ，$x_i \bullet x_j = \min(x_i,x_j)$，　$x_i \vee x_j = \max(x_i,x_j)$，$\sim x_i = 1-x_i$ で定義するものとする。

[定理2.1] 任意のFuzzy論理関数Fは主加法標準形，$F=F_{sd} \vee F_{md}$ で一意に表現できる。ただし，F_{sd} は単積項の和(OR)であり，F_{md} は相補最小項の和である。 （証明略）

[定理2.2] 任意の正則3値論理関数Rは主加法標準形，$R=R_{sd} \vee R_{hd} \vee R_{md}$ で一意に表現できる。ただし，R_{sd} は単積項の和(OR)であり，R_{hd} は1/2最小項の和であり，R_{md} は相補最小項の和である。 （証明略）

今，集合{0,1/2,1}，および，この集合のn個の直積 $V(=\{0,1/2,1\}^n)$ に次のような半順序関係 $\le_k$ を定義する。

[定義2.3] a, bを{0,1/2,1}の元とするとき，

$a \le_k b \iff a \le b \le 1/2$ または $1/2 \le b \le a$。

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ をVの元とするとき，$\boldsymbol{a} \le_k \boldsymbol{b} \iff \forall i;\ a_i \le_k b_i$。 □

定義2.3により，Vは半順序関係 $\le_k$ に関して半順序集合をなす。ここで，Vの元と定義2.1および定義2.2の単積項との間に，また $B(=\{0,1\}^n)$ の元と1/2最小項との間に，また $V-B$ の元と相補最小項との間に次のような1対1の対応が存在する。

[定義2.4] $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in V$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in B$，$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)\in V-B$ とするとき単積項 $\alpha = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$，1/2最小項 $\beta=(1/2)\cdot x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$，相補最小項 $\gamma = x_1^{c_1}\cdots x_n^{c_n}$ は次のとき互いに対応している。

$a_i=1 \iff x_i^{a_i}=x_i$，　$a_i=0 \iff x_i^{a_i}=\sim x_i$，

$a_i=1/2 \iff x_i^{a_i}=1$。

$b_i=1 \iff x_i^{b_i}=x_i$，　$b_i=0 \iff x_i^{b_i}=\sim x_i$，

$b_i=1/2 \iff x_i^{b_i}=1$。

$c_i=1 \iff x_i^{c_i}=x_i$，　$c_i=0 \iff x_i^{c_i}=\sim x_i$，

$c_i=1/2 \iff x_i^{c_i}=x_i\cdot \sim x_i$。 □

定義2.4により，Fuzzy論理関数および正則3値論理関数の積項間の包含関係はVにおける鎖（chain）および反鎖（anti-chain）の問題として議論できる。

[定義2.5] FをFuzzy論理関数とする。入力を $b\in B$ に限ったとき，ある2値論理関数fを表しているとき，Fとfは互いにB-equivalentであるといい，fとB-equivalentな，すべてのFuzzy論理関数の集合を $B-eq(f)$ と表す。また，Rを正則3値論理関数とする。入力を $b\in B$ に限ったとき，ある2値論理関数fが $R(b)=0$ のとき $f(b)=0$。$R(b)=1$ または $R(b)=1/2$ のとき $f(b)=1$ であるならばRとfはR-equivalentであるという。fとR-equivalentな正則3値論理関数の集合を $R-eq(f)$ と表す。 □

n変数Fuzzy論理関数の集合を $\boldsymbol{F}$，正則3値論理関数の集合を $\boldsymbol{R}$ とすると，

An Improvement of bounds on the number of Fuzzy Switching Functions and Regular Ternary Logic Functions.
Hisayuki Tatsumi*, Tomoyuki Araki*, Masao Mukaidono**
* Kanagawa Institute of Technology
** Meiji University

$$|F| = \sum_f |b - eq(f)|,\quad |R| = \sum_f |R - eq(f)|$$

が成立する。さらに，次の定理が成立する。

［定理2.3］ 2値論理関数 f の異なった加法形式の集合を DF(f) と表すと，

$$|B - eq(f)| = |DF(f)| \times |DF(\sim f)|,$$

$$|R - eq(f)| = \left(\sum_{g \subseteq f} |DF(g)|\right) \times |DF(\sim f)|$$

（証明略）

定理2.3より，$|B - eq(f)|$ および $|R - eq(f)|$ を求める問題は，$|DF(f)|$ と $|DF(\sim f)|$ を求める問題に帰着される。今，Vの元のうち，0または1の数がk個である元の集合を V_k と記し，ランクkの集合という。このとき，$|V_k| = 2^k\binom{n}{k}$ である。$V_{\bar{n}}$ で $V - V_n$ なる集合を表す。また，f の内項に対応するものを，それぞれ V(f)，$V_k(f)$ で表す。$V_{\bar{n}}(f)$ についても同様である。

［定理2.4］ $|DF(f)|$ は $V_{\bar{n}}(f)$ における反鎖の数に等しい。

（証明略）

定理2.3および定理2.4より，次の2式が成立する。

$$|B - eq(f)| \le 2^{|V_{\bar{n}}(f)|} \cdot 2^{|V_{\bar{n}}(\sim f)|} = 2^{|V_{\bar{n}}(f)| + |V_{\bar{n}}(\sim f)|} = 2^{|V_{\bar{n}}(1)|},$$

$$|R - eq(f)| = \left\{\sum_{i = |V_n(g)|, g \subseteq f} \binom{|V_n(f)|}{i} |DF(g)|\right\} |DF(\sim f)|$$

$$< \left\{2^{|V_n(f)|} DF(f)\right\} \cdot |DF(\sim f)| = 2^{|V_n(f)|} \cdot |B - eq(f)|.$$

したがって，Fuzzy論理関数，正則3値論理関数の数を評価する問題は $|B - eq(f)|$ を評価する問題となり，$\max_f |B - eq(f)|$ は $V_{\bar{n}}(1)$ の反鎖の数，即ち定数関数1の加法形式の数 $|DF(1)|$ を評価する問題となる。

3．限界式

3.1 上界

本報告で上界の評価に使用した手法は，$V_{\bar{n}}(1)$ を2分木の鎖に分割して，反鎖の数を求めるものである。

$|V_k|$ が最大になる k を r とすると，$r = \left\lceil \frac{2}{3} n \right\rceil$ である。

このとき，最大反鎖を含む V_r を堺に $V_{\bar{n}}$ を $\bigcup_b V_b, (0 \le b \le r)$ と $\bigcup_d V_d, (r + 1 \le d \le n - 1)$ に分割する。

ここで，$\bigcup_b V_b$ では，V_r の 2^r 個の集合を極小元として $\binom{n}{r}$ 個の2分木として分割できる。この各2分木は，最大元を無視すると，，長さ r の鎖が2本，長さ r − k の鎖が 2^k 本，合計 $2 + \sum 2^k$ $(= 2^r)$ 本の鎖から構成される。また，$\bigcup_d V_d$ では，ディルウォースの定理より長さ $n - 1 - r$ の $2^r\binom{n}{r}$ 個の鎖で構成できる。よって，取らない場合も含めて，この鎖からの元の取り方は $n - r$ 通り存在する。これより，V_r の 2^r 個の集合を単位として，$\bigcup_b V_b$ および $\bigcup_d V_d$ から作られた鎖からの元の選び方は，

$$n \cdot \prod_{k=0}^{r-1} ((r - k) + (n - r)^{2^k} = n \cdot \prod_{k=0}^{r-1} (n - k)^{2^k}$$

$$< n^{2^{r-1}} \cdot (n - r)^{2^{r-1}}.$$

よって，$r = \frac{2}{3} n$ のとき，関数1の加法形式の数の上限として $|DF(1)| < \left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^{2^r\binom{n}{r}}$。ここで，スターリングの階乗の近似公式を用いると，

$$\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{c_1}{n}\right) \le 2^r\binom{n}{r} \le \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{c_2}{n}\right)$$

なる $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$ が存在する。ゆえに，

$$|\Phi| < \left(2^{2^n}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^{2^r\binom{n}{r}} < 2^{3^n\left(\beta\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{2\sqrt{\pi n}}\left(1 + \frac{c}{n}\right)\log_2 \frac{n}{\sqrt{3}}\right)}$$

ここで，$\alpha = \beta = 1$ のとき，$|\Phi|$ はFuzzy論理関数の上界を表し，$\alpha = \beta = 2$ のとき，$|\Phi|$ は正則3値論理関数の上界を表す。

3.2 下界

現在までに知られている最も良い下界は文献[1]において報告されているが，そこで使用されている手法は，$V_{\bar{n}}$ の隣接した2ランク間の元の包含関係に着目した手法であたが，本報告では，隣接した3ランク間 (V_{k-1}, V_k, V_{k+1}) の関係に着目して，さらに良い下界を得た。

$$|\Psi| > 2 \cdot \left(|DF(1)| + 2^{n+\delta} |DF(1-)|\right)$$

ただし、$|DF(1)| > 2^{\alpha} \varepsilon_r \left\{1 + \left(4\varepsilon_r^{2-r}\right)^{-\binom{n}{r-1}}\right\}^{\gamma}$,

$$\alpha = \left(2^{r-1} - 1\right)\binom{n}{r-1} + \left(2^{r+1} - 1\right)\binom{n}{r+1},$$

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\binom{n}{r},\ \gamma = 2^n - 1,\ \varepsilon_r = \left(1 + 2^{-r}\right)^{2r}。$$

ここで，1−は、定数関数1から1つの最小項を取り除いた関数を表す。また、$\delta = 0$ のとき $|\Psi|$ はFuzzy論理関数の下界を表し，$\delta = 1$ のとき，正則3値論理関数の下界を表す。

4．結論

本報告では，現在報告されている中で最もすぐれた上界，下界を導出した。これらの導出において，下界についてはShapiroの方法を，上界についてはGilbertの方法を改善して用いている。限界式の導出においては，これらの手法の応用では，今後，本質的な改善は望めない。Vにおいて，全く異なった構造を考える必要がある。

参考文献

[1] Berman, J. and Mukaidono, M., "Enumerating fuzzy switching functions and free Kleene algebra", Comp. Math. Appl., vol.10, pp.25-35, 1984.

[2] Tatsumi, H., Araki, T., Mukaidono, M. and Kizawa, M., "Bounds on the number of fuzzy switching functions", Proc. 1st Asian Fuzzy Systems Symposium. pp.166-172, 1993.