

不等間隔の拡散システムを用いた ポリゴン曲面の平滑化および張力制御

栗 山 繁^{†,☆}

ポリゴンで構成される曲面は柔軟で直接的な形状の設計に適しているが、幾何学的な連続性の制約条件を課していないので滑らかな形状の設計には適していない。我々は以前に、ポリゴンの各頂点の位置座標値とその2次微分値を隣接する頂点間で拡散することにより、ポリゴン曲面を平滑化する手法を提案したが、不規則なポリゴンに対しては不自然な突出や折り返しを生じてしまう。本論文では、頂点間の接続間隔を用いて不等間隔の3次スプラインに基づく拡散システムを構成することにより、不規則なポリゴンに対しても自然で滑らかな形状を生成する手法を提案する。また、張力スプラインに基づく曲面の張りの制御方法を提案する。

Smoothing and Tension Control of Polygonal Meshes by Using a Nonuniform Diffusion System

SHIGERU KURIYAMA^{†,☆}

Polygonal meshes are suitable for flexible and direct designs of shapes; they are, however, not suitable for designs of smooth shapes because of lack of constraints on geometric continuity. We previously proposed a method for smoothing polygonal meshes by diffusing each vertex's position and its second derivative between nearby vertices, which has a tendency to cause undesirable protrusions or folds for irregular polygons. This paper proposes a diffusion system based on nonuniform cubic splines that can generate natural and smooth shapes for irregular polygons by using spacings for connections between vertices, and also proposes tension controls for meshes based on tension splines.

1. はじめに

ポリゴン曲面は最も基本的かつ簡略な曲面形状の記述形式であり、頂点位置や位相の操作に関する制約が少ないので、柔軟かつ直接的に形状を設計できる。しかしながら、ポリゴン曲面の形状を滑らかにするには、その頂点を直接対話的に移動させるだけでは困難であり、数値的な処理による平滑化が必要とされる。

一方、計算機支援幾何設計の分野で一般的に用いられている媒介変数曲面は、形状を制御する点の位置にかかわらず幾何学的な滑らかさが保証されているが、その曲面式の連続性に関する条件により、面を囲む境界曲線の数や位相に関する制約が生じ、形状設計の柔

軟性を損なう原因となっている。

ポリゴン曲面を再帰的に分割して形状を滑らかにする手法^{1)~3)}は、分割ごとに更新される頂点の座標値をB-スプラインの再分割公式を用いて計算しているので、生成される形状はスプライン曲面の連続性(滑らかさ)を継承する。形状の設計方法によっては、再分割されるポリゴン曲面が分割前のポリゴンの特定の頂点を含むようにすることが望ましいが、これらの手法で補間の条件を満たすためには大域的な線形システム²⁾を解かねばならない。一方、補間の条件を陽に含む局所的な計算でポリゴン曲面を再帰的に分割する手法⁴⁾は、すべてのポリゴンを三角形で構成しなければならず、形状の記述方法に柔軟性を欠く。

形状の張りのエネルギーをモデル化したノルム関数を最小化してポリゴン曲面を平滑化する手法^{5),6)}は、再分割手法の上記の問題点を解消するが、これらの手法が形状を平滑化するための計算量はポリゴン曲面を構成する頂点の総数の2乗のオーダーとなる。したがって、曲面の詳細度が増すにつれて実時間で処理

[†] 広島市立大学情報科学部
Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University

[☆] 現在、豊橋技術科学大学情報工学系
Presently with Department of Information & Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

が困難になるので、対話的な操作には適していない。

ポリゴン曲面の頂点の座標値を信号処理の対象と見なし、ローパス・フィルタを構成する手法⁷⁾は、頂点の総数のオーダーの計算量で形状が平滑化されるので対話的な操作に適している。しかしながら、平滑化の機構がエネルギーの最小化に基づいておらず、補間の性質も含まれていない。

我々は以前に、離散ラプラシアンを用いて2変量の拡散システムを構成する手法¹²⁾(以後、SD-システムと呼ぶ)を提案した。この手法は、フィルタの手法の利点に加えて以下の改良点を含む。

- 平滑化の機構が3次スプラインのエネルギーの最小化に基づく。
- 平滑化の機構が頂点に対する補間の条件を陽に含む。
- 拡散システムを修正することにより形状の張りを制御できる。

しかしながら、このSD-システムは頂点間の各接続の幾何学的な距離を考慮せずに構成されているので、最初に与えられるポリゴン面が相対的にかなり短い辺を含む場合、生成される曲面形状に不自然な突出部分が生じてしまうことが観測されてきた。ゆえに本研究では、媒介変数曲面の変数間隔に相当する頂点間の接続間隔を導入した拡散システムと、それに付随する形状の張りの制御を新たに構成する。本手法により、不自然な突出や折り返しを生じないようにポリゴン曲面が平滑化され、形状の張りが柔軟に制御される。

本論文ではまず最初に、曲線形状の区分的な線形近似であるポリライン曲線の平滑化に適した拡散システムを、張力変数を有する不等間隔3次スプライン曲線の形状を模倣するように構成し、次に頂点間の接続の位相を2次元に拡張して、ポリゴン曲面に対する拡散システムを構成する。

2. 3次スプラインに収束する拡散システム

曲面の形状を区分的に線形近似したポリゴン曲面は、3次元実数ベクトル R^3 で表される頂点位置の座標値の集合と頂点の接続関係を表す整数の指標の集合として表される。本研究で提案する拡散システムでは、ポリゴンを構成する頂点の集合 $V \in \{v_1, \dots, v_N\}$ の i 番目の頂点 v_i に対して、幾何的および位相的な状態変数 $v_i := (P_i, R_i, C_i, S_i)$ を設ける。ここで、 $P_i \in R^3$ は頂点の位置、 $R_i \in R^3$ は P_i の2次微分値、 C_i は隣接する頂点の番号の集合、および S_i は隣接する頂点 $v_j \in C_i$ との接続間隔 $s_{j,i} \in R$ の集合を表す。ただし、ポリゴン面を構成する有向辺を表す C_i の要素は

S_i の要素と1対1に対応し、接続間隔はその辺の向きに対して不変 $s_{j,i} = s_{i,j}$ とする。また、状態変数 P_j と R_j は、隣接する頂点 $v_j \in C_i$ に対して値が拡散される。

ポリゴン曲面の形状は与えられる複数の点を補間するように決定されるが、これらの補間される点を固定点と呼び、その頂点番号の集合を V_F で表す。また、曲面の形状を滑らかにするために拡散システムを用いて位置が計算される点を移動点と呼び、その頂点番号の集合を V_M で表す。曲面形状の概形を表す初期多面体のすべての頂点を固定点とし、その多面体を再分割する際に付け加えられる頂点を移動点とすると、再分割手法と類似した方法で曲面が生成される。しかしながら、本手法では固定点の選択方法に関する制約条件がないので再分割手法よりも柔軟な設計が可能となる。

ポリゴン曲面が縮退した例と見なされるポリライン曲線の場合、隣接する頂点は1次元状の接続関係で $C_i = \{i-1, i+1\}$ のように表される。ただし、開曲線の終端点に対しては1つの頂点のみが隣接し、閉曲線に対しては C_i の値は周期的に定義される。3次スプライン曲線は、2次の連続性 (C^2 級) を有するすべての曲線の中で、その2階導関数の2乗積分値で表される張りのエネルギーが最小となる⁸⁾。この性質(ノルム最小性と呼ばれる)は3次スプライン曲線の2次微分値が1次式で線形に補間されていることに起因し、形状の滑らかさを保証するのに必要な条件と見なされる。ゆえに、ポリライン曲線がこのノルム最小性を有するためには、 \ddot{R}_i を R_i の2次微分値とすると $\ddot{R}_i = 0$ の条件が必要となる。ここで \ddot{R}_i は、離散ラプラシアンを用いて定義される拡散演算子 Δ を用いて、以下のように近似的に計算される。

$$\ddot{R}_i = \frac{1}{K_i} \Delta R_i, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta R_i &= \frac{s_{i+1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} (R_{i-1} - R_i) \\ &\quad + \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} (R_{i+1} - R_i), \\ K_i &= \frac{s_{i-1} s_{i+1}}{2} \end{aligned}$$

ただし、記述の簡略化のため S_i の要素の2番目の添字 i が明らかな場合、 $s_{j,i} \rightarrow s_j$ の様に略記している。 \ddot{R}_i の値をゼロベクトルに収束させる更新計算は、式(1)を用いて以下のように構成される。

$$\tilde{R}_i = R_i + \lambda K_i \ddot{R}_i = R_i + \lambda \Delta R_i, \quad i \in V_M(2)$$

ただし、 \tilde{R}_i は R_i の更新値を表し、 λ を拡散定数とする。

一方、移動点の位置 \mathbf{P}_i の 2 階微分値は拡散演算子を適用した $\Delta \mathbf{P}_i / K_i$ によって近似的に計算されるので、この値が \mathbf{R}_i に一致する必要がある。ゆえに、 \mathbf{P}_i の値を以下の式で $\tilde{\mathbf{P}}_i$ に更新する。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_i &= \mathbf{P}_i + \lambda K_i \left(\frac{1}{K_i} \Delta \mathbf{P}_i - \mathbf{R}_i \right) \\ &= \mathbf{P}_i + \lambda \Delta \mathbf{P}_i - \lambda K_i \mathbf{R}_i, \quad i \in \mathbf{V}_M \quad (3) \end{aligned}$$

固定点においては、その位置の座標値は $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i$, $i \in \mathbf{V}_F$ のように凍結され、 \mathbf{R}_i の値は \mathbf{P}_i の値から求められる 2 次微分の値に一致するように、以下の式で更新される。

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{K_i} \Delta \mathbf{P}_i, \quad i \in \mathbf{V}_F \quad (4)$$

ここで、式 (1)~(4) で与えられる拡散システムを NonUniform Spline Diffusion システム (以後、NUSD-システム) と命名する。NUSD-システムは、ポリゴンを構成するすべての移動点に対して、 \mathbf{P}_i を補正するベクトルの長さが与えられた閾値 T 以下 ($\forall i \in \mathbf{V}_M, \|\tilde{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P}_i\| < T$) になれば、その更新計算の繰返しを打ち切る。ただし、閾値はポリゴン曲面の全体の大きさの 0.1% から 0.01% 程度に設定する。拡散定数 λ の値は NUSD-システムの収束性に直接影響し、 $0 < \lambda < 1$ の範囲の値をとることが収束の必要条件となる (付録を参照)。

開放端を有するポリライン曲線を平滑化するには終端条件が必要となるが、端点において $\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$ の条件を課すことにより、自然終端条件の 3 次スプライン曲線が模倣される。また、終端での曲線の傾き (すなわち、1 次微分値) は仮想的な終端点を付け加えることにより制御できる。

媒介変数曲線を生成するには、スプラインの節点ベクトルのように各節点間に対する変数の間隔を指定する必要がある。すべての節点間での変数間隔を等しく設定する方法は、節点間の幾何学的な距離を無視しているため、隣接する節点が相対的に近接する部分で形状に不自然な突出や折り返しを生じてしまう。これを除去するのに、節点間の幾何学的な距離を変数間隔とするコード長 (Chord Length) 法が一般的に用いられる。ゆえに、NUSD-システムにおいても変数間隔に相当する接続間隔を $s_{j,i} = \|\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i\|$ と設定して形状の突出や折り返しを取り除く。

図 1 に NUSD-システムを用いて平滑化したポリライン曲線の例を示し、その形状が不等間隔の 3 次スプライン曲線に収束することを示す。ただし、固定点を黒丸、固定点の間に等間隔で初期配置される移動点を菱形で表す。また、各々の曲線に要した更新計算の

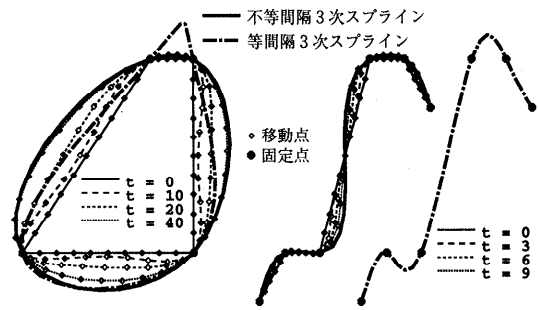


図 1 不等間隔 3 次スプラインへの収束

Fig. 1 Convergence to nonuniform cubic splines.

繰返し数を t で表し、拡散定数の値は $\lambda = 0.7$ とする。すべての移動点に対する 2 次微分値は $\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$ に初期設定され、各頂点間の接続間隔 $s_{j,i}$ は頂点間の距離を用いるコード長法で指定される。太い実線で示される曲線は、不等間隔の節点ベクトルをコード長法で計算した 3 次スプライン曲線を表し、太い 1 点鎖線で示される曲線は、等間隔の節点ベクトルによる 3 次スプライン曲線を表す (形状の突出部に注意せよ)。図 1 より、ポリライン曲線の形状は不等間隔 3 次スプライン曲線に収束することが確認できる。

3. 張力制御モデル

曲線の媒介変数に関する連続性の条件を幾何学的に拡張したもの^{9),10)}は、張力スプラインと総称される。これらの手法は、連続性の条件を緩める際に生じる自由度を変数化して、曲線形状の張りの制御に用いる。以前に提案した SD-システムでは、隣接する各頂点の状態変数に対する重みの値を線形関数で変動させて、張力スプラインの張りの制御を模倣した。しかしながら、NUSD-システムにおいては接続間隔の値が重みの値を決定するので、張りの制御の際に重みの値を変動させると、形状の制御に予期しない副作用を生じてしまう。ゆえに本章では、新たな状態変数を導入して形状の張りを制御する方法を提案する。

張力スプライン $\mathbf{Q}(t)$ の 2 次幾何学的連続性の条件式は、変数値 $t = t_i$ の節点における張力変数 β_i を用いて、以下のように表される。

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}_i(t_i - 0)}{dt^2} + \beta_i \frac{d \mathbf{Q}_i(t_i - 0)}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{Q}_i(t_i + 0)}{dt^2}$$

上式より、張力スプラインは張力変数が設けられる節点において、左右方向からの 2 つの 2 次微分量 $d^2 \mathbf{Q}_i(t_i \pm 0) / dt^2$ の差が 1 次微分量 $d \mathbf{Q}_i(t_i - 0) / dt$ の β_i 倍であると解釈できる。そこで、ポリライン曲線の固定点 v_i が $t = t_i$ の節点に相当するものとし、その点での左右方向からの 2 次微分値を離散的に近似

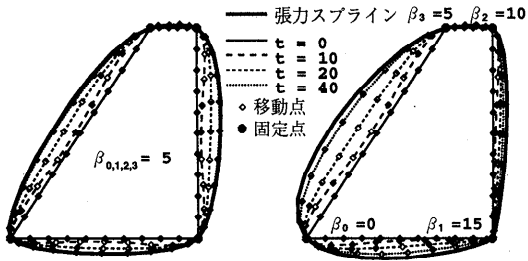


図2 不等間隔張力スプラインへの収束
Fig. 2 Convergence to nonuniform tension splines.

する2つの状態変数 \mathbf{R}_i^+ と \mathbf{R}_i^- を設ける. そしてさらにそれらの平均値が式(4)で更新計算される $\tilde{\mathbf{R}}_i$ の値に一致し, それらの差分値が位置座標 \mathbf{P}_i の1次微分の離散的な近似値 $\dot{\mathbf{P}}_i$ の β_i 倍であると仮定して, 以下の式で更新計算する.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_i^\pm &= \frac{1}{K_i} \Delta \mathbf{P}_i \pm \frac{\beta_i}{2} \dot{\mathbf{P}}_i, \\ \dot{\mathbf{P}}_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{s_{i+1}} + \frac{\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}}{s_{i-1}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

固定点と隣接する移動点 v_{i-1} (または v_{i+1}) に対しては, 式(5)で計算される \mathbf{R}_i^- (または \mathbf{R}_i^+) の値をその固定点の \mathbf{R}_i の値と見なして式(2)を適用する.

図2に図1で示されるポリライン曲線に対して, その各固定点に張力変数を指定してポリライン曲線を平滑化させた例を示す. これらの例から, 張力変数を導入したNUSD-システムは, 同じ張力変数と不等間隔の節点ベクトルを用いて生成される, 太い実線で表される張力スプライン¹⁰⁾の形状を模倣することが確認できる.

4. ポリゴン曲面の生成

本章では, 頂点間の接続の位相を1次元から2次元に拡張して, ポリライン曲線の平滑化をポリゴン曲面に適用する. すなわち, ポリゴン曲面の大まかな形状を初期多面体として与え, 多面体の各面を再分割する頂点の座標値を拡散システムを用いて計算して, 形状の滑らかなポリゴン曲面を生成する.

まず, 式(1)における \mathbf{R}_i の2次微分値 $\ddot{\mathbf{R}}_i$ の近似的な計算法と拡散演算子 Δ の定義を, 頂点間の2次元状の接続を考慮して以下のように拡張する.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_i &= \frac{1}{K_i} \Delta \mathbf{R}_i, \\ \Delta \mathbf{R}_i &= \frac{1}{\sum_{k \in \mathbf{C}_i} s_k^{-1}} \sum_{j \in \mathbf{C}_i} \left(\frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{s_j} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$K_i = \frac{\sum_{k \in \mathbf{C}_i} s_k}{\sum_{k \in \mathbf{C}_i} s_k^{-1}}$$

ここでポリゴン曲面の平滑化の式は, ポリライン曲線の平滑化で導入された式(2), (3)および(4)に対して, 式(6)の拡散演算子 Δ と定数 K_i を用いることにより構成される. ただし, 位置座標の2次微分の値 $\ddot{\mathbf{P}}_i$ は, 曲面上の点 \mathbf{P}_i を囲む閉曲線を γ , および γ 上の点を v_j とすると, 以下の γ に関する線積分を近似的に表す.

$$\ddot{\mathbf{P}}_i \approx \frac{\int_{v_j \in \gamma} (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i) / s_j dl(v_j)}{\int_{v_j \in \gamma} s_j dl(v_j)} \approx \bar{\kappa}_i \mathbf{N}_i$$

ただし, $\bar{\kappa}_i$ は点 \mathbf{P}_i での平均曲率を, また \mathbf{N}_i は法線ベクトルを表す.

双3次スプライン曲面のパッチの境界において, その境界を横断する方向での連続性の次数は3次から2次に低減する. これをNUSD-システムの状態変数 \mathbf{R}_i の条件に置き換えると, 境界上の頂点において境界と直交する方向に関する $\tilde{\mathbf{R}}_i = 0$ の条件を弛緩することができる. したがって, 初期ポリゴンの各辺がスプライン曲面のパッチ境界に相当するものとして, \mathbf{R}_i の値をその辺上に存在する頂点間でのみ拡散するように, 頂点 v_i の隣接点の集合 \mathbf{C}_i を以下の集合 \mathbf{C}_i^E で置き換える.

$$\mathbf{C}_i^E := \begin{cases} \mathbf{C}_i \cap \mathbf{E} & ; i \in \mathbf{E} \\ \mathbf{C}_i & ; i \in \bar{\mathbf{E}} \end{cases}$$

ただし, \mathbf{E} は初期ポリゴンの辺上に存在する点の頂点番号の集合を表し, $\bar{\mathbf{E}}$ はその補集合を表す. 初期ポリゴンの辺に沿った拡散を優先する機構は, \mathbf{C}_i をそのまま用いた等方性の拡散機構と比較して \mathbf{R}_i の値をそのベクトル長が均一になるように分散する効果があり, より滑らかな形状を生成する¹²⁾. また, このパッチ境界を模倣した拡散機構は, ポリゴン曲面が開いた境界を含む場合にもそのまま適用できる.

媒介変数曲面に対しては, 各頂点は直交座標系や重心座標系などの2次元空間の変数に埋め込まれるが, 本手法では接続間隔の値 \mathbf{S}_i のみを用いるので, 各頂点の2次元空間への埋め込みを必要としない. ただし, 接続間隔の値は, 突出部のない自然な形状を生成するために, ポリライン曲線の場合と同様にしてポリゴンの対応する辺の長さを用いて決定する. また, ポリゴンを再分割する際に生成される辺に対する接続間隔は, 新たに付け加えられる頂点を初期ポリゴンの面上に投影して計算される辺の長さを用いて決定する

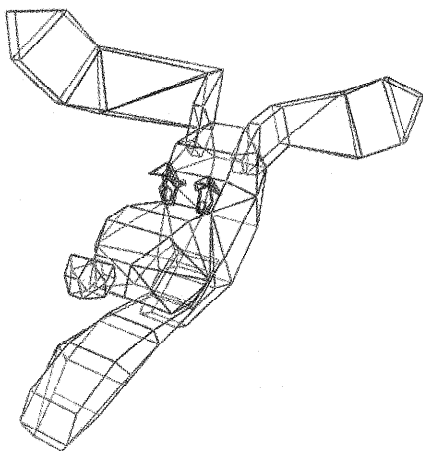


図3 初期ポリゴン
Fig. 3 Initial polygons.

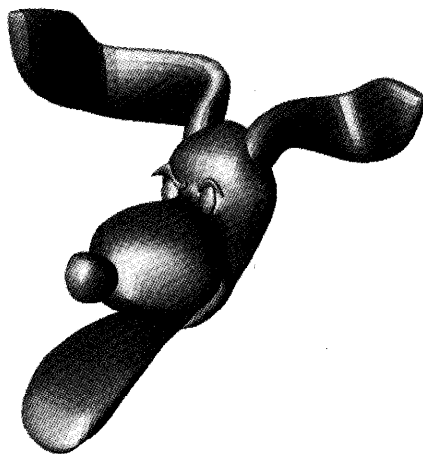


図5 コード長法による接続間隔を用いたポリゴン曲面の平滑化
Fig. 5 Smoothing with chord length parametrization.

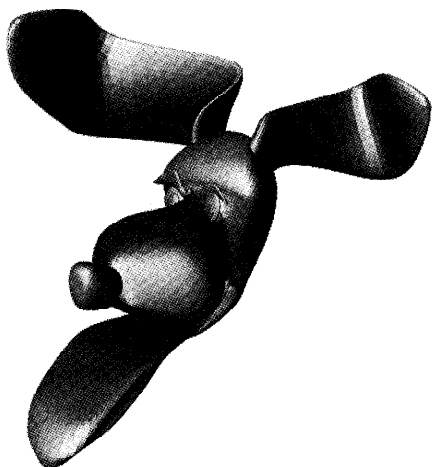


図4 一定の接続間隔を用いたポリゴン曲面の平滑化
Fig. 4 Smoothing with uniform parametrization.

図3で与えられる初期ポリゴンのすべての頂点を固定点として各辺に対する接続間隔を計算した後、ポリゴンを等2分割してNUSD-システムにより平滑化する手続きを階層的に3度実行した例を、図4と図5に示す。図4には一定の接続間隔が、また図5にはコード長法で計算した接続間隔が用いられており、図4における犬の耳と舌の部分の不自然な突出形状が図5において除去されているのが確認できる。また、等2分割の各階層における移動点の計算の繰返し数は、第1階層目から順に図4の例では(34, 27, 9)、図5の例では(34, 28, 22)である。ただし、拡散定数入の値は0.6に、閾値Tの値は0.1%に設定されて

いる。

5. ポリゴン曲面の張力制御

本章では、張力変数を用いたポリライン曲線の形状の張りの制御を、ポリゴン曲面に対して適用する。ポリライン曲線の場合に左右方向からの2次微分値を表す状態変数 R_i^{\pm} を設けたのに対して、ポリゴン曲面の場合は頂点 v_i に対してその隣接点 $v_j \in C_i$ の方向に関する状態変数 R_i^j を設ける。このとき、2次微分値の単位方向ベクトル $N_i = \Delta P_i / \|\Delta P_i\|$ を法線とする平面上に隣接点 v_j 方向の差分ベクトル $(P_j - P_i)$ を投射して、その方向の1次微分の近似値 \dot{P}_i^j を以下のように計算する。

$$\dot{P}_i^j = \frac{1}{s_j} \{P_j - P_i - [(P_j - P_i) \cdot N_i] N_i\}$$

ただし、 \cdot はベクトルの内積を表す。ここで、 $\beta_i^j \geq 0$ を頂点 v_i に関して隣接点 v_j 方向に指定される張力変数とし、その方向に対する2次微分値 R_i^j の値を以下のように更新する。

$$\bar{R}_i^j = \Delta P_i / K_i + \beta_i^j \dot{P}_i^j$$

ただし、張力変数 β_i^j の値の直観的な設定法として、初期ポリゴンの各頂点および各辺に対して張力変数を1つずつ指定し、以下のように値を割り振る。

- 頂点 v_i に β_i^v を指定する：
 $\forall j \in C_i, \beta_i^j = \beta_i^v$
- 辺 $e = \{v_p, v_q\}$ に $\beta_{p,q}^e$ を指定する：
 $\forall i \in C^e, \forall j \in \bar{C}_i^e, \beta_i^j = \beta_{p,q}^e$

ただし、 C^e は辺 e 上に存在する両端点 v_p, v_q 以外の

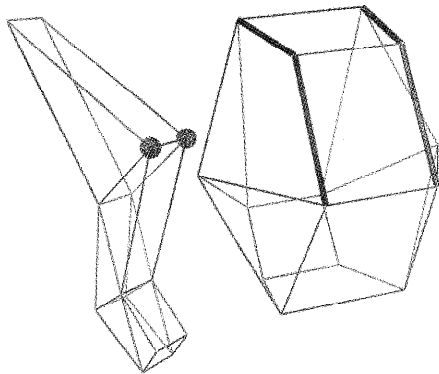


図6 初期ポリゴンに対する張力変数の設定

Fig. 6 Setup of tension parameters on initial polygons.

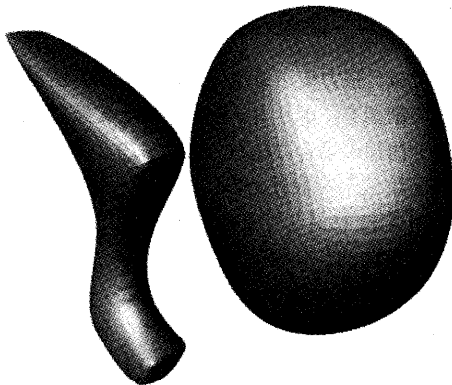


図7 張力制御を用いないポリゴン曲面の平滑化

Fig. 7 Smoothing of polygonal meshes without tension controls.

すべての頂点の集合を表し、 \bar{C}_i^e は頂点 v_i と隣接し辺 e 上に存在しない頂点の集合を表す。

SD-システム¹²⁾で導入されたポテンシャル変数による張りの制御は、上記の頂点に対する張力変数の指定方法と同様の張りの効果をもたらすが、NUSD-システムは各辺に対する張力変数を設けるので、より柔軟な張りの制御が可能となる。また、ポテンシャル変数の値を拡散する繰返し計算が不要になる分だけ、平滑化に要する計算量が軽減される。

図6に示される犬の右眉と鼻の部位を表す初期ポリゴンに対し、張力制御を用いずに平滑化した例を図7に、また張力制御を用いて平滑化した例を図8に示す。ただし、図6において球と太い線で示されるす

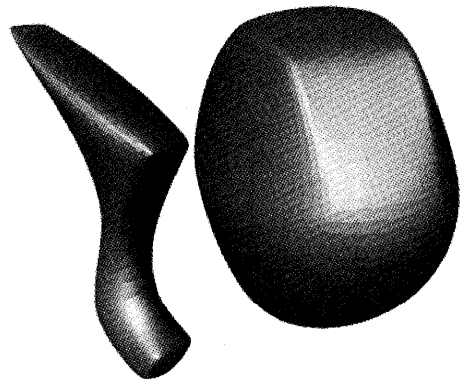


図8 張力制御を用いたポリゴン曲面の平滑化

Fig. 8 Smoothing of polygonal meshes with tension controls.

べての頂点と辺に対して、 $\beta_i^e = \beta_{p,q}^e = 2$ が設定されている。図8の例が示すように、頂点に対する張力変数値 β^v の値を増加させると、その点付近での面の形状に張りが加わり、ある辺の両端点に対して同時に張力を増加させると、その辺に沿ったポリライン曲線の形状が平坦化していく。また、辺に対する張力変数値 β^e の値を増加させると、その辺に沿った曲線の形状には影響を与えずに、その辺を共有する曲面の形状に張りが加わる。

6. おわりに

本論文で提案したポリゴン曲面の平滑化手法の以前に提案したSD-システムに対する改良点は、以下のよう

- 平滑化の機構がポリゴンの辺の長さを考慮して構成されるので、生成される形状に不自然な突出部分を生じない。
- 頂点の各接続方向に対して張力変数が設定されるので、形状の張りの制御に対する柔軟性が高まる。平滑化の計算が収束解に至るまでに必要とされるNUSD-システムの更新計算の繰返し数は、曲面の詳細度や固定点に対する移動点の数の比率等に依存する。しかしながら、ポリゴン曲面の分割と平滑化を階層的に実行することにより、更新計算の回数を各階層ごとに一定数におさえられる。したがって、本手法の平滑化にともなう計算量は分割後のポリゴンの頂点の総数のオーダーとなり、実時間で形状更新を必要とする対話的な曲面の設計に適している。

NUSD-システムは平滑化の更新計算の解が収束す

る条件の十分性を保証しないが、多くの複雑な形状に対する平滑化を試みた結果、張力制御を用いない場合には発散や振動状態には至らなかった。ただし、張力制御を用いる際に、張力変数を多くの頂点で指定したりその値を極端に大きくしたりすると、値の発散や微妙な振動状態が起こりうる。また、移動点の数が固定点の数と比較して少ない場合に不安定状態に陥りやすいことが観測された。NUSD-システムの解の収束は固定点における2次微分 \mathbf{R}_i (あるいは \mathbf{R}_i^j) の値の収束によって保証されるので、その値を安定に収束させるための計算法の改良や、収束を速めるための拡散定数の値の最適化が望まれる。また、NUSD-システムの非線形な性質は収束解の一意性を必ずしも保証しないので、収束状態の解析的な評価方法の検討等も今後の課題である。

謝辞 本研究を進めるうえで貴重な助言をいただいた、広島市立大学情報科学部情報機械システム工学科の橋啓八郎教授ならびに同大学芸術学部デザイン工芸学科の中嶋健明助教授に謝意を表します。また、初期ポリゴンのデータと有意義なるコメントをいただいた、Alias/Wavefront社のJerome Maillot氏に感謝します。なお本研究は、財団法人堀情報科学振興財団の研究助成、ならびに広島市立大学の一般特定研究である、“虚像環境の利用によるアートの可能性の研究”の援助を受けて行われたものである。

参考文献

- 1) Catmull, E. and Clark, J.: Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Comput. Aided Des.*, Vol.10, No.6, pp.350-355 (1978).
- 2) Nasri, A. H.: Polyhedral Subdivision Methods for Free-Form Surfaces. *ACM Trans. Graph.*, Vol.6, No.1, pp.29-73 (1987).
- 3) DeRose, T., Kass, M. and Truong, T.: Subdivision Surfaces in Character Animation. Proc. SIGGRAPH '98, *Comput. Graph.*, Proceedings, Annual Conference Series, pp.85-94 (1998).
- 4) Dyn, N. and Levin, D.: A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control. *ACM Trans. Graph.*, Vol.9, No.2, pp.160-169 (1990).
- 5) Welch, W. and Witkin, A.: Free-Form Shape Design Using Triangulated Surfaces. Proc. SIGGRAPH '94, *Comput. Graph.*, Proceedings, Annual Conference Series, pp.247-256 (1994).
- 6) Szeliski, R. and Tonnesen, D.: Surface Modeling with Oriented Particle Systems, Proc. SIG-

GRAPH '92, *Comput. Graph.*, Vol.26, No.2, pp.185-194 (1992).

- 7) Taubin, G.: A Signal Processing Approach to Fair Surface Design, Proc. SIGGRAPH '95, *Comput. Graph.*, Proceedings, Annual Conference Series, pp.351-358 (1995).
- 8) Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, *A Practical Guide*, Academic Press (1990)
- 9) Barsky, B. A. and Beatty, J. C.: Local Control of Bias and Tension in Beta-Splines, Proc. SIGGRAPH '83, *Comput. Graph.*, Vol.17, pp.193-218 (1983).
- 10) Cohen, E.: A New Local Basis for Designing with Tensioned Splines. *ACM Trans. Graph.*, Vol.6, No.2, pp.81-122 (1987).
- 11) Françoise, C.: *Eigenvalues of Matrices*, John Wiley & Sons (1993).
- 12) 栗山 繁, 橋啓八郎: 拡散システムを用いたポリゴン曲面の生成手法, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J80-D-II, No.10, pp.2761-2769 (1997).

付録 NUSD-システムの収束の必要条件

まず、固定点における状態変数 \mathbf{R}_i の値が T_f 回目の更新で一定の値に収束するものと仮定する。このとき移動点は1から N_m までの頂点番号、固定点は $N_m + 1$ から $N_m + N_f$ までの頂点番号とすると、移動点の \mathbf{R}_i の値を更新する式(2)は以下の線形システムで近似される。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(t)} &= \mathbf{M} \mathbf{R}^{(t-1)} + \mathbf{F} \mathbf{R}_F^{(T_f)} \\ &= \mathbf{M}^{t-T_f} \mathbf{R}^{(T_f)} + \sum_{k=0}^{t-T_f} \mathbf{M}^k \mathbf{F} \mathbf{R}_F^{(T_f)}, (7) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{I} + \lambda (\mathbf{W} - \mathbf{I}), \quad t > T_f \end{aligned}$$

ただし、 \mathbf{I} は $N_m \times N_m$ の単位行列とし、 $\mathbf{R}_i^{(t)}$ を状態変数 \mathbf{R}_i の t 回目の更新値とすると、 $\mathbf{R}^{(t)}$ は移動点での $\{\mathbf{R}_1^{(t)}, \dots, \mathbf{R}_{N_m}^{(t)}\}^*$ を (ただし、* は行列の転置を表す)、 $\mathbf{R}_F^{(T_f)}$ は固定点での収束値 $\{\mathbf{R}_{N_m+1}^{(T_f)}, \dots, \mathbf{R}_{N_m+N_f}^{(T_f)}\}^*$ を表す。また、 \mathbf{F} は固定点に対する拡散演算子の重み係数の値を要素とする $N_m \times N_f$ の行列である。 $N_m \times N_m$ の行列 $\mathbf{W} := [w_{i,j}]$ の要素の値は拡散演算子の移動点に対する重み係数の値から、 $\forall i \in \mathbf{V}_M \quad \forall j \in \mathbf{C}_i \cap \mathbf{V}_M, w_{i,j} = s_j^{-1} / \sum_{k \in \mathbf{C}_i} s_k^{-1}$ で与えられるので、 $\forall i \in \mathbf{V}_M, w_{i,i} = 0, w_{i,j \neq i} \geq 0, \sum_{j \in \mathbf{V}_M} w_{i,j} \leq 1$ の関係式が容易に導かれる。したがって、行列 \mathbf{W} の固有値を σ_i とすると、 $|\sigma_i| \leq \text{MAX}_{j \in \mathbf{V}_M} \{\sum_{k \in \mathbf{V}_M} |w_{j,k}|\} \leq 1$ の関係が成立する¹¹⁾。

式 (7) が収束する必要十分条件は、行列 \mathbf{W} の固有値 σ_i を用いて表される行列 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \lambda(\mathbf{W} - \mathbf{I})$ の固有値; $1 + \lambda(\sigma_i - 1)$ の絶対値が 1 より小さくなる条件となり、拡散定数の値の範囲 $0 < \lambda < 1$ が導かれる。実際には固定点での状態変数 \mathbf{R}_i の解の収束は保証されないので、上記の条件はすべての移動点に対して \mathbf{R}_i の値が一意に収束するための十分条件とはならない。

次に、固定点における \mathbf{R}_i の値の収束を仮定すると、移動点における \mathbf{R}_i の値も $T_m (> T_f)$ 回目の更新で収束すると見なされるので、移動点の位置の座標値を更新する式 (3) は以下の線形システムで近似される。

$$\mathbf{P}^{(t)} = \mathbf{M}\mathbf{P}^{(t-1)} + \mathbf{F}\mathbf{P}_F - \lambda\mathbf{R}^{(T_m)}, t > T_m \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{R}^{(T_m)} = \{\mathbf{R}_1^{(T_m)}, \dots, \mathbf{R}_{N_m}^{(T_m)}\}^*$ は移動点での収束値であり、 $\mathbf{P}_F = \{\mathbf{P}_{N_m+1}, \dots, \mathbf{P}_{N_m+N_f}\}^*$ は固定点での位置座標を表す。

ゆえに、式 (8) が収束する条件は明らかに式 (7) が収束する条件と同様に導かれ、 $0 < \lambda < 1$ が NUSD-システムの収束の必要条件となる。 □

(平成 10 年 3 月 26 日受付)

(平成 10 年 11 月 9 日採録)



栗山 繁 (正会員)

昭和 37 年生。昭和 62 年大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻修士課程修了。翌年日本アイ・ビー・エム (株) 入社、東京基礎研究所にて CAGD システムの研究開発に従事。

平成 6 年広島市立大学情報科学部情報機械システム工学科助教授。平成 10 年豊橋技術科学大学情報工学系助教授。計算機支援幾何設計、CG モデリングシステムに関する研究に従事。電子情報通信学会、ACM 各会員。