漸化式法で求められるベッセル関数を用いる $\sin x$ と $\cos x$ の数値計算法の誤差解析

吉 田 年 雄[†]

三角関数 $\sin x$ および $\cos x$ は，第 1 種ベッセル関数 $J_{\nu+k}(x)$（k：非負の整数）を用いて，$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x)$，$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k J_{\nu+2k}(x)$（$\sigma_k$ および γ_k は ν と x によって決まる係数）のように表すことができる．漸化式法によって求められる $J_{\nu+k}(x)$（k：非負の整数）の計算値を，上式の有限項で打ち切ったものに代入することにより，$\sin x$ および $\cos x$ の近似式を得ることができる．本論文では，その計算法の誤差解析を行い，$\nu=0$ と選んで得られる近似式についての有用な誤差の評価式を導出している．

Error Analysis of Numerical Method for $\sin x$ and $\cos x$ Using the Approximation to Bessel Functions Obtained by the Recurrence Technique

TOSHIO YOSHIDA[†]

The functions $\sin x$ and $\cos x$ can be expressed as $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x)$, $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k J_{\nu+2k}(x)$ (σ_k,γ_k: coefficients which depend on ν and x). We can obtain the approximations to $\sin x$ and $\cos x$ by substituting approximations to $J_{\nu+k}(x)$ (k: non-negative integer) computed by recurrence technique into the truncated form of these expansions. In this paper, we perform the error analysis of the numerical method and derive useful estimates of the error for approximations obtained by choosing $\nu=0$.

1. はじめに

三角関数の $\sin x$ および $\cos x$ は，第 1 種ベッセル関数 $J_{\nu+k}(x)$（k：非負の整数）を用いて，次式のように表すことができる[1)]．

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x) \tag{1}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k J_{\nu+2k}(x) \tag{2}$$

ここで，ν は実数であり，σ_k および γ_k は，

$$\sigma_k=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\cdot\frac{2(-1)^k(\nu+2k+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+2k+1)}{(2k+1)!\Gamma(2\nu+1)} \tag{3}$$

$$\gamma_k=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\cdot\frac{2(-1)^k(\nu+2k)\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu+2k)}{(2k)!\Gamma(2\nu+1)} \tag{4}$$

である．したがって，$\sin x$ および $\cos x$ は，以下に述べるように，漸化式法によって得られる $J_{\nu+k}(x)$ $(k=0,1,\cdots)$ の計算値を用いて求めることができる．

m を適当に選ばれた正の偶数とし，α を小さな任意定数とする．

$$F_{\nu+m+1}(x)=0,\quad F_{\nu+m}(x)=\alpha \tag{5}$$

を出発値として，$J_\nu(x)$ を満足する漸化式

$$F_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}F_\nu(x)-F_{\nu+1}(x) \tag{6}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{\nu+m-1}(x), F_{\nu+m-2}(x), \cdots, F_\nu(x)$ を順次，計算する．それを用いれば，ある $N(<m)$ に対して，$i=0,1,\cdots N$ についての $J_{\nu+i}(x)$ の近似式

$$J_{\nu+i}(x)\approx F_{\nu+i}(x)\Bigg/\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k F_{\nu+2k}(x) \tag{7}$$

† 中部大学経営情報学部
College of Business Administration and Information Science

を得る．ただし，

$$\epsilon_k = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+k)}{k!} \qquad (8)$$

である．

$\sin x$ および $\cos x$ の計算のための近似式は，式 (1) および (2) の右辺を有限項で打ち切ったものに，式 (7) の右辺の近似式を代入して，次式のように得られる．

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^{m/2} \sigma_k F_{\nu+2k+1}(x) \Big/ \sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x) \qquad (9)$$

$$\cos x \approx \sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k F_{\nu+2k}(x) \Big/ \sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x) \qquad (10)$$

$\sin x$ および $\cos x$ の能率的な計算のためには，ν を，

$$\nu = 0 \qquad (11)$$

と選ぶとよい．そのようにすれば，$\sin x$ および $\cos x$ の計算のための近似式は

$$\sin x \approx \sum_{k=0}^{m/2} (-1)^k F_{2k+1}(x) \Big/ \left(\frac{1}{2}F_0(x) + \sum_{k=1}^{m/2} F_{2k}(x)\right) \qquad (12)$$

$$\cos x \approx \left(\frac{1}{2}F_0(x) + \sum_{k=1}^{m/2} (-1)^k F_{2k}(x)\right) \Big/ \left(\frac{1}{2}F_0(x) + \sum_{k=1}^{m/2} F_{2k}(x)\right) \qquad (13)$$

となり，ガンマ関数を必要としない．

この方法による $\sin x$ あるいは $\cos x$ の計算の特長は，x の値が大きい場合でも，m を大きくしさえすれば，要求精度で関数値が簡単に求められることである．$\sin x$ あるいは $\cos x$ のテイラー級数を用いる従来からの計算法は，x の値が大きい場合には桁落ちのため利用できないので，関数の周期性を利用して，x の小さい場合に帰着させるために円周率 π の数値が必要である（本方法では，π の数値は必要でない）．本計算法は，多倍長演算システムを作成したとき，$\sin x$ あるいは $\cos x$ の関数値を高精度で求める場合に有用である．

本論文では，近似式 (9) および (10) の誤差解析を行い，$\nu = 0$ の場合の近似式 (12) および (13) についての誤差の評価式を導出している．このような誤差解析は，本研究以前には行われていない．

2. $\sin x$ の計算法の誤差解析

関数 $J_{\nu+k}(x)$ と第 2 種ベッセル関数 $Y_{\nu+k}(x)$ はともに同じ漸化式 (6) を満足する．逆に式 (6) の一般解は

$$F_{\nu+i}(x) = \xi J_{\nu+i}(x) + \eta Y_{\nu+i}(x) \qquad (14)$$

によって表される．ここで ξ および η は任意定数である．これらの任意定数は式 (5) によって決定される．式 (5) から次式が得られる．

$$F_{\nu+m+1}(x) = \xi\, J_{\nu+m+1}(x) + \eta\, Y_{\nu+m+1}(x) = 0 \qquad (15)$$

式 (14) と (15) から η を消去すると，

$$F_{\nu+i}(x) = \xi\left(J_{\nu+i}(x) - \frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+i}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right) \qquad (16)$$

を得る．上式と次の関係式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k J_{\nu+2k}(x) = 1 \qquad (17)$$

より

$$\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k \left(\frac{F_{\nu+2k}(x)}{\xi} + \frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right) + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \epsilon_k J_{\nu+2k}(x) = 1 \qquad (18)$$

が得られる．式 (16) と (18) から ξ を消去すると，

$$J_{\nu+i}(x) = \frac{F_{\nu+i}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}(1 - \Phi_{\nu,m}(x)) + \frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+i}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \qquad (19)$$

が求められる．ただし，

$$\Phi_{\nu,m}(x) = \sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k \frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} + \sum_{k=m/2+1}^{\infty} \epsilon_k J_{\nu+2k}(x) \qquad (20)$$

である．式 (19) において，

$$|\Phi_{\nu,m}(x)| << 1 \qquad (21)$$

および

$$\left|\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+i}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\right| << |J_{\nu+i}(x)| \qquad (22)$$

であるならば，$J_{\nu+i}(x)$ は式 (7) により計算できることになる．

式 (19) を式 (1) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x)\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k F_{\nu+2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}(1-\Phi_{\nu,m}(x))\\
&\quad + \frac{J_{\nu+m+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k Y_{\nu+2k+1}(x)\\
&\quad + \sum_{k=m/2+1}^{\infty}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x)\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k F_{\nu+2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}(1-\Phi_{\nu,m}(x))\\
&\quad + \frac{J_{\nu+m+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k Y_{\nu+2k+1}(x)\\
&\quad + \sin x - \sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k J_{\nu+2k+1}(x)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる．これより，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k F_{\nu+2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}\\
&= \sum_{k=0}^{m/2-1}[\sigma_k\{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k+1}(x)\\
&\quad - J_{\nu+2k+1}(x)Y_{\nu+m+1}(x)\}]\\
&\quad /\{(\Phi_{\nu,m}(x)-1)\,Y_{\nu+m+1}(x)\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

が得られ，上式は，近似式 (9) の陽的な表現となっている．この式は，Lommel 多項式[2]（x^{-1} の多項式）

$$
\begin{aligned}
&R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)\\
&= \frac{\pi x}{2}(J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k+1}(x)\\
&\quad -J_{\nu+2k+1}(x)Y_{\nu+m+1}(x))\\
&= \sum_{i=0}^{m/2-k-1}\left\{\frac{(-1)^i(m-2k-2i-1)!}{i!(m-2k-i-1)!}\right.\\
&\quad \left.\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+2k+i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k+2i+1}\right\}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_k F_{\nu+2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)}{(\pi x/2)\,(\Phi_{\nu,m}(x)-1)\,Y_{\nu+m+1}(x)}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となる．

以下の **2.1**～**2.4** では，**2.5** において用いる $\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$，$\Phi_{\nu,m}(x)$，$(\pi x/2)\sin x\; Y_{\nu+m+1}(x)$，$\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$ について，式の変形，簡約化を行う．

2.1 $\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$ の変形

式 (26) の右辺の $\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$ を文献 3) の手法を用いて書き換えると，次式を得る（付録参照）．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)\\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}\sum_{l=0}^{m/2-1}\frac{(-1)^l}{l!}\\
&\quad \cdot\frac{\Gamma(\nu+m-l+1)\Gamma(\nu+m-l+1/2)}{\Gamma(l+3/2)\Gamma(\nu+m-2l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

2.2 $\Phi_{\nu,m}(x)$ の変形

式 (20) で与えられる $\Phi_{\nu,m}(x)$ は，次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\nu,m}(x) &= \sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k\frac{J_{\nu+m+1}(x)Y_{\nu+2k}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}\\
&\quad -\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k J_{\nu+2k}(x)+1\\
&= \frac{Y_{\nu+m+1}(x)+\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

この $\Phi_{\nu,m}(x)$ については，文献 5)，6) から，

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\nu,m}(x)\\
&= \left[\frac{-1}{\pi}\sum_{k=m/2+1}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1+2k}\right.\\
&\quad +\left\{\cos\nu\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{m+1+2k}}{k!\Gamma(\nu+m+k+2)}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{m+1+2k}}{(m+k+1)!\Gamma(-\nu+k+1)}\Bigg\}$$

$$\Bigg/\sin\nu\pi\Bigg]\Bigg/Y_{\nu+m+1}(x) \qquad (29)$$

と変形され，$\nu+m/2>>x/2$ ならば，[ ] の第1の部分の $k=m/2+1$ の項が主要項であるので，$\Phi_{\nu,m}(x)$ の有用な評価式として，

$$\Phi_{\nu,m}(x)\approx\frac{-\Gamma(\nu+m/2)}{\pi Y_{\nu+m+1}(x)(m/2+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1} \qquad (30)$$

が得られることが分かる．

2.3 $(\pi x/2)\sin xY_{\nu+m+1}(x)$ の変形

2.5 節で用いる $(\pi x/2)\sin xY_{\nu+m+1}(x)$ は，文献 7) より，次のように変形される．

$$\begin{aligned}
&(\pi x/2)\sin xY_{\nu+m+1}(x)\\
&=-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\\
&\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)\Gamma(\nu+m-k+1/2)}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(\nu+m-2k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\\
&+\Bigg\{\pi^{3/2}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+3}\\
&\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\\
&\cdot\frac{\Gamma(\nu+m+2k+5/2)}{\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\\
&-(-1)^{m+1}\pi^{3/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu+k+1)}\\
&\cdot\frac{\Gamma(-\nu+m+2k+5/2)}{\Gamma(-\nu+k+3/2)(m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)}\\
&\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\Bigg\}\Bigg/\sin(\nu+m+1)\pi
\end{aligned} \qquad (31)$$

2.4 $\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_kR_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$ の変形

式 (26) の右辺の $\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_kR_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$ を書き換える（前述の 2.1 節の場合と同様な手続きをとればよいので途中を省略する）．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_kR_{m-2k,\nu+2k+1}(x)\\
&=\Gamma(\nu+m+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{l=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+l)}{l!\Gamma(\nu+2l)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\\
&\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(-l-\nu/2+1)_i(m-2l+1)_i(-l)_i}{i!(-l-\nu/2)_i(-\nu-l+1)_i(-\nu-m)_i}\\
&\cdot(-\nu-2l)_i
\end{aligned} \qquad (32)$$

上式に一般化された超幾何級数の和に関する定理[4]

$$\begin{aligned}
&{}_4F_3(a,a/2+1,b,c;a/2,1+a-b,1+a-c;-1)\\
&=\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}
\end{aligned} \qquad (33)$$

を用いれば，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_kR_{m-2k,\nu+2k+1}(x)\\
&=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}
\end{aligned} \qquad (34)$$

2.5 誤差 $E^{(s)}_{\nu,m}(x)$ の表示式の変形

近似式 (9) の絶対誤差 $E^{(s)}_{\nu,m}(x)$ を次式で定義する．

$$E^{(s)}_{\nu,m}(x)=\frac{\sum_{k=0}^{m/2}\sigma_kF_{\nu+2k+1}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_kF_{\nu+2k}(x)}-\sin x \qquad (35)$$

上式は，式 (26) を用いれば，

$$\begin{aligned}
E^{(s)}_{\nu,m}(x)&=\Bigg\{\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_kR_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)\\
&-\sin x(\pi x/2)(\Phi_{\nu,m}(x)-1)Y_{\nu+m+1}(x)\Bigg\}\\
&/\{(\pi x/2)(\Phi_{\nu,m}(x)-1)Y_{\nu+m+1}(x)\}
\end{aligned} \qquad (36)$$

と表され，式 (28) と (34) を用いれば次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&E^{(s)}_{\nu,m}(x)=\Bigg\{\\
&\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_kR_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)+\frac{\pi x}{2}\sin xY_{\nu+m+1}(x)\\
&-\frac{\pi x}{2}\sin x\Phi_{\nu,m}(x)Y_{\nu+m+1}(x)\Bigg\}\\
&\Bigg/\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}
\end{aligned} \qquad (37)$$

上式 (37) の右辺の分子において，第1の部分と第2項の和は，式 (27) と (31) より，次式で表される．

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_kR_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)+\frac{\pi x}{2}\sin xY_{\nu+m+1}(x)\\
&=-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}\sum_{k=m/2}^{m}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\\
&\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)\Gamma(\nu+m-k+1/2)}{\Gamma(\nu+m-2k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\\
&+\Bigg\{\pi^{3/2}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+3}
\end{aligned}$$

$$
\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}
\cdot\frac{\Gamma(\nu+m+2k+5/2)}{\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+5/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}
-(-1)^{m+1}\pi^{3/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu+k+1)}
\cdot\frac{\Gamma(-\nu+m+2k+5/2)}{\Gamma(-\nu+k+3/2)(m+k+1)!\Gamma(m+k+5/2)}
\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\Bigg\}\Bigg/\sin(\nu+m+1)\pi \qquad (38)
$$

上式において，$\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$（式(27)）は，$(\pi x/2)\sin xY_{\nu+m+1}(x)$ の展開式（式(31)）の一部により，相殺されていることに注意しよう．この相殺により，式(37)において，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ ならば，誤差 $E^{(s)}_{\nu,m}(x)$ は小さくなりうるのである．

上式(38)において，$(\nu+m/2)\cdot m/2>>x/2$ ならば，第1の部分の $k=m/2$ の項が主要項であるので，

$$
\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)+\frac{\pi x}{2}\sin xY_{\nu+m+1}(x)
\approx-\frac{(-1)^{m/2}\sqrt{\pi}}{(m/2)!}
\cdot\frac{\Gamma(\nu+m/2+1)\Gamma(\nu+m/2+1/2)}{\Gamma(m/2+3/2)\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+1} \qquad (39)
$$

と表すことができる．

したがって，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$（ν が小さいとき，m が x よりある程度大きければ，これは成り立つ）ならば，式(37)は，式(30)および(39)を用いて，次式のように評価できる．

$$
E^{(s)}_{\nu,m}(x)\approx\frac{-(-1)^{m/2}\sqrt{\pi}}{(m/2)!\Gamma(m/2+3/2)}
\cdot\frac{\Gamma(\nu+m/2+1)\Gamma(\nu+m/2+1/2)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1}
+\frac{\sin x\Gamma(\nu+m/2)}{\left(\frac{m}{2}+1\right)!\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} \qquad (40)
$$

上式において，$\nu=0$ とおけば，近似式(12)の絶対誤差 $E^{(s)}_{0,m}(x)$ の評価式

$$
E^{(s)}_{0,m}(x)
\approx\frac{-(-1)^{m/2}}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1}
+\frac{\sin x}{\frac{m}{2}\left(\frac{m+2}{2}\right)\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} \qquad (41)
$$

が得られる．上式の右辺の2つの項の絶対値は，固定された x に対して，m を増すと小さくなり，$\left|E^{(s)}_{0,m}(x)\right|$ が，おおむね，1程度以下であるためには，m は x 程度の大きさ以上であることが必要であることが数値実験から分かる．

$m>>x$ ならば，式(41)は，第1項が第2項よりかなり大きいので，

$$
E^{(s)}_{0,m}(x)
\approx\frac{-(-1)^{m/2}}{\left(\frac{m+1}{2}\right)\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \qquad (42)
$$

と表すことができる．$m\approx x$ の場合には，式(41)の第1項は第2項よりは大きいが，圧倒的には大きくないので，上式(42)はあらい近似の評価式となる（評価式は，誤差がどの程度であるかの大まかな目安を与えればよいので，実用上はこれで十分であると考えられる）．

また，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ ならば，式(28)より，

$$
Y_{\nu+m+1}(x)\approx-\frac{2}{\pi x}\sum_{k=0}^{m/2}\epsilon_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)
=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m-1}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \qquad (43)
$$

が得られるので，式(42)は，

$$
E^{(s)}_{0,m}(x)\approx\frac{2(-1)^{m/2}}{\pi(m+1)Y_{m+1}(x)} \qquad (44)
$$

のように近似でき，ベッセル関数 $Y_{m+1}(x)$ の性質から，m を増すと（m が x 程度の大きさ以上において），絶対誤差 $E^{(s)}_{0,m}(x)$ の絶対値が小さくなることが分かる．

3. cos x の計算法の誤差解析

式(14)から(22)までは，$\sin x$ の計算法の誤差解

析の場合と同一のことがいえる．式 (19) を式 (2) に代入すると，

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k J_{\nu+2k}(x)$$
$$= \frac{\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k F_{\nu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x)} (1 - \Phi_{\nu,m}(x))$$
$$+ \frac{J_{\nu+m+1}(x)}{Y_{\nu+m+1}(x)} \sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k Y_{\nu+2k}(x)$$
$$+ \cos x - \sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k J_{\nu+2k}(x) \qquad (45)$$

となる．これより，

$$\frac{\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k F_{\nu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}$$
$$= \sum_{k=0}^{m/2} [\gamma_k \{J_{\nu+m+1}(x) Y_{\nu+2k}(x)$$
$$- J_{\nu+2k}(x) Y_{\nu+m+1}(x)\}]$$
$$/\{(\Phi_{\nu,m}(x) - 1)\, Y_{\nu+m+1}(x)\} \qquad (46)$$

が得られ，上式は，近似式 (10) の陽的な表現となっている．この式は，Lommel 多項式 (25) を用いて表すと，

$$\frac{\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k F_{\nu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x)}$$
$$= \frac{\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)}{(\pi x/2)\,(\Phi_{\nu,m}(x) - 1)\, Y_{\nu+m+1}(x)} \qquad (47)$$

となる．

3.1 $\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$ の変形

$\sin x$ の場合と同様にして，式 (47) の右辺の $\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$ を書き換えると次式が得られる．

$$\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$$
$$= \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m} \sum_{l=0}^{m/2} \frac{(-1)^l}{l!}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(\nu+m-l+1)\Gamma(\nu+m-l+3/2)}{\Gamma(l+1/2)\Gamma(\nu+m-2l+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \qquad (48)$$

3.2 $(\pi x/2) \cos x Y_{\nu+m+1}(x)$ の変形

3.3 節で用いる $(\pi x/2) \cos x Y_{\nu+m+1}(x)$ は，文献 7) より，次のように変形できる．

$$(\pi x/2) \cos x Y_{\nu+m+1}(x)$$
$$= -\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(\nu+m-k+1)\Gamma(\nu+m-k+3/2)}{\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+m-2k+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$+ \Bigg\{ \pi^{3/2} \cos(\nu+m+1)\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+2}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(\nu+m+2k+3/2)}{\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$-(-1)^{m+1} \pi^{3/2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu+k+1)}$$
$$\cdot \frac{\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)}{\Gamma(-\nu+k+1/2)(m+k+1)!\Gamma(m+k+3/2)}$$
$$\cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \Bigg\} \Big/ \sin(\nu+m+1)\pi \qquad (49)$$

3.3 $E^{(c)}_{\nu,m}(x)$ の表示式の変形

近似式 (10) の絶対誤差 $E^{(c)}_{\nu,m}(x)$ を次式で定義する．

$$E^{(s)}_{\nu,m}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k F_{\nu+2k}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2} \epsilon_k F_{\nu+2k}(x)} - \cos x \qquad (50)$$

$\sin x$ の場合と同様にすれば，

$$E^{(c)}_{\nu,m}(x) = \Bigg\{$$
$$\sum_{k=0}^{m/2} \gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x) + \frac{\pi x}{2} \cos x Y_{\nu+m+1}(x)$$
$$- \cos x \frac{\pi x}{2} \Phi_{\nu,m}(x) Y_{\nu+m+1}(x) \Bigg\}$$
$$\Bigg/ \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m} \sum_{k=0}^{m/2} \frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$(51)$$

が得られる．上式 (51) の右辺の分子において，第 1 の部分と第 2 項の和は，式 (48) と (49) より，次式で表される．

$$\sum_{k=0}^{m/2}\gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)+\frac{\pi x}{2}\cos xY_{\nu+m+1}(x)$$
$$=-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m}\sum_{k=m/2+1}^{m}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)\Gamma(\nu+m-k+3/2)}{\Gamma(\nu+m-2k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$+\left\{\pi^{3/2}\cos(\nu+m+1)\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+m+2}\right.$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m+2k+3/2)}{\Gamma(\nu+m+k+2)\Gamma(\nu+m+k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$
$$-(-1)^{m+1}\pi^{3/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu+k+1)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(-\nu+m+2k+3/2)}{\Gamma(-\nu+k+1/2)(m+k+1)!\Gamma(m+k+3/2)}$$
$$\left.\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right\}\Big/\sin(\nu+m+1)\pi \tag{52}$$

上式において，$\sum_{k=0}^{m/2}\gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)$（式 (48)）は，$(\pi x/2)\cos xY_{\nu+m+1}(x)$ の展開式（式 (49)）の一部により，相殺されている．この相殺により，式 (51) において，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ ならば，誤差 $E^{(c)}_{\nu,m}(x)$ は小さくなりうる．

上式 (52) において，$(\nu+m/2)\cdot m/2>>x/2$ ならば，第 1 の部分の $k=m/2+1$ の項が主要項であるので，

$$\sum_{k=0}^{m/2}\gamma_k R_{m-2k,\nu+2k+1}(x)+\frac{\pi x}{2}\cos xY_{\nu+m+1}(x)$$
$$\approx-\frac{(-1)^{m/2+1}\sqrt{\pi}}{(m/2+1)!}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m/2)\Gamma(\nu+m/2+1/2)}{\Gamma(m/2+3/2)\Gamma(\nu-1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2} \tag{53}$$

と表すことができる．

したがって，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ ならば，式 (51) は，式 (30) および (53) を用いて，次式のように評価できる．

$$E^{(c)}_{\nu,m}(x)\approx\frac{(-1)^{m/2+1}\sqrt{\pi}}{(m/2+1)!\Gamma(m/2+3/2)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m/2)\Gamma(\nu+m/2+1/2)}{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2}$$
$$+\frac{\cos x\Gamma(\nu+m/2)}{\left(\frac{m}{2}+1\right)!\sum_{k=0}^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} \tag{54}$$

上式において，$\nu=0$ と置けば，近似式 (13) の絶対誤差 $E^{(c)}_{0,m}(x)$ に対して，次の評価式が得られる．

$$E^{(c)}_{0,m}(x)$$
$$\approx\frac{(-1)^{m/2+1}(x/2)^{m+2}}{\frac{m(m+1)(m+2)}{4}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}$$
$$+\frac{\cos x(x/2)^{m+2}}{\frac{m(m+2)}{4}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}} \tag{55}$$

式 (55) において，右辺の第 2 項は，$\cos x$ を含むので，$\left|E^{(c)}_{0,m}(x)\right|$ に対する過大評価の評価式として，

$$\left|E^{(c)}_{0,m}(x)\right|$$
$$\approx\frac{(x/2)^{m+2}}{\frac{m(m+1)(m+2)}{4}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}$$
$$+\frac{(x/2)^{m+2}}{\frac{m(m+2)}{4}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}} \tag{56}$$

が得られる．$m>>1$ ならば，上式は，第 2 項が第 1 項より大きいので，$\left|E^{(c)}_{0,m}(x)\right|$ に対する大まかな評価式として，

$$\left|E^{(c)}_{0,m}(x)\right|$$
$$\approx\frac{(x/2)^{m+2}}{\frac{m(m+2)}{4}\sum_{k=0}^{m/2}\frac{(m-k)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}} \tag{57}$$

が得られる．

また，$|\Phi_{\nu,m}(x)|<<1$ ならば，式 (43) を用いれば，式 (57) は

$$\left|E^{(c)}_{0,m}(x)\right|\approx\frac{2x}{\pi m(m+2)Y_{m+1}(x)} \tag{58}$$

表 1 $x = 10$ の場合の近似式 (12)，(12) の絶対誤差，評価式 (41) および評価式 (42) の値
Table 1 Approximation (12), absolute error of (12), esimate (41) and estimate (42) in the case of $x = 10$.

	(a) $m = 20$	(b) $m = 50$
Approximation (12)	$-5.440279 \cdot 10^{-1}$	$-5.44021110889369813404747661851 08 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$-6.8 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-31}$
Estimate (41)	$-6.4 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-31}$
Estimate (42)	$-5.1 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-31}$

	(c) $m = 70$
Approximation (12)	$-5.4402111088936981340474766185137728168364301291 6224 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$6.4 \cdot 10^{-53}$
Estimate (41)	$6.4 \cdot 10^{-53}$
Estimate (42)	$7.0 \cdot 10^{-53}$

表 2 $x = 100$ の場合の近似式 (12)，(12) の絶対誤差，評価式 (41) および評価式 (42) の値
Table 2 Approximation (12), absolute error of (12), esimate (41) and estimate (42) in the case of $x = 100$.

	(a) $m = 120$	(b) $m = 170$
Approximation (12)	$-5.063815 \cdot 10^{-1}$	$-5.0636564110975879365655755 2 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$-1.5 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-26}$
Estimate (41)	$-9.6 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-26}$
Estimate (42)	$-6.8 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-25}$

	(c) $m = 220$
Approximation (12)	$-5.0636564110975879365655761045978543206503272129065 7336 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$-1.3 \cdot 10^{-53}$
Estimate (41)	$-1.2 \cdot 10^{-53}$
Estimate (42)	$-9.9 \cdot 10^{-54}$

表 3 $x = 1000$ の場合の近似式 (12)，(12) の絶対誤差，評価式 (41) および評価式 (42) の値
Table 3 Approximation (12), absolute error of (12), esimate (41) and estimate (42) in the case of $x = 1000$.

	(a) $m = 1050$	(b) $m = 1170$
Approximation (12)	$8.268821 \cdot 10^{-1}$	$0.8268795405320025602558874291104 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-30}$
Estimate (41)	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-31}$
Estimate (42)	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-31}$

	(c) $m = 1250$
Approximation (12)	$0.82687954053200256025588742910921814121272496784778838 8 \cdot 10^{-1}$
Absolute error of (12)	$6.7 \cdot 10^{-53}$
Estimate (41)	$3.9 \cdot 10^{-53}$
Estimate (42)	$2.4 \cdot 10^{-53}$

のように近似でき，ベッセル関数 $Y_{m+1}(x)$ の性質から，m を増すと（m が x 程度の大きさ以上において），絶対誤差 $E_{0,m}^{(c)}(x)$ が絶対値が小さくなることが分かる．

4. 数 値 例

ここでは，$\sin x$ についての数値例を示す．$\cos x$ については，$\sin x$ とほぼ同様な結果であるので省略する．**表 1** には，$x = 10$ で，$m = 20$，$m = 50$，$m = 70$ の場合について，**表 2** には，$x = 100$ で，$m = 120$，$m = 170$，$m = 220$ の場合について，**表 3** には，$x = 1000$ で，$m = 1050$，$m = 1170$，$m = 1250$ の場合について，近似式 (12)，その絶対誤差，評価式 (41)，評価式 (42) の値を示す．m を増すと，近似式 (12) の値の絶対誤差は小さくなっている．また，式 (41) は，近似式 (12) の絶対誤差のよい評価式になっている．さらに，式 (42) も近似式 (12) の絶対誤差の大まかな評価式になっていることが分かる．なお，この計算は，FUJITSU の M-1800（4 倍精度および 8 倍精度演算）を用いて行った．

表 4 x と p に対する M
Table 4 M for x and p.

x	p									
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	6	10	14	18	20	24	26	30	32	34
2	8	14	18	22	26	28	32	36	38	42
3	10	16	20	24	28	32	36	40	44	46
4	12	18	22	28	32	36	40	44	46	50
5	14	20	26	30	34	38	42	46	50	54
6	16	22	26	32	36	42	46	50	54	58
7	16	24	28	34	40	44	48	52	56	60
8	18	24	30	36	42	46	50	56	60	64
9	20	26	32	38	44	48	54	58	62	66
10	20	28	34	40	46	50	56	60	64	70
20	32	42	50	56	64	70	76	80	86	92
30	44	54	64	72	78	86	92	98	104	110
40	56	68	76	86	94	100	108	116	122	128
50	66	80	90	98	108	116	122	130	138	144
60	78	90	102	112	120	130	138	144	152	160
70	88	102	114	124	134	142	152	160	166	174
80	100	114	126	136	146	156	164	172	180	188
90	110	124	138	148	160	168	178	186	194	202
100	120	136	150	160	172	182	190	200	208	216
200	224	244	262	276	290	302	312	324	334	344
500	532	560	582	602	618	636	650	666	680	694
1000	1038	1074	1102	1126	1148	1170	1188	1208	1226	1242

5. $\sin x$ および $\cos x$ の計算について

$\sin x$ を絶対誤差 $0.5 \cdot 10^{-p}$ 以下で求めることを考える．固定された x および p に対して，

$$\left|E_{0,m}^{(s)}(x)\right| < 0.5 \cdot 10^{-p} \tag{59}$$

を満足する最小の m を M とする．**表 4** には，表中に記した x および p について，$E_{0,m}^{(s)}(x)$ を式 (42) により計算した場合の M を示す（式 (41) により計算してもほとんど同じ結果が得られる）．x あるいは p が他の場合の M についても，式 (42) と (59) より，比較的簡単に求めることができる．紙面の都合で省略するが，$\cos x$ についてもほぼ同様な結果が得られる．本計算法では，m が大きいとき，丸め誤差などによる誤差が大きくなるので，演算桁数に余裕を持って計算しないと目標の精度では関数値を求めることはできない．たとえば，4 倍精度演算（仮数部 16 進 28 桁）では，$x = 100$ では，m を 196 以上にしても，誤差は 10^{-33} 程度以下にはならないし，また $x = 1000$ では，m を 1170 以上にしても，誤差は 10^{-28} 程度以下にはならない．

6. おわりに

本論文では，漸化式法により得られるベッセル関数を用いて $\sin x$ あるいは $\cos x$ を求める計算法の誤差解析を行った．その結果として，有用な誤差の評価式を得ることができた．最後に，使用させていただいた 8 倍精度演算システムの作成者の二宮市三名古屋大学名誉教授（前中部大学教授）に深謝します．

参 考 文 献

1) Watson, G.N: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, second edition, p.369, Cambridge University Press (1966).
2) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式 III, p.225, 岩波書店，東京 (1968).
3) 吉田年雄：一般化された超幾何級数の和の定理の応用，情報科学リサーチジャーナル，中部大学情報科学研究所，Vol.2, pp.57–60 (1995).
4) Slater, L.J.: *Generalized Hypergeometric Functions*, p.56, Cambridge University Press (1966).
5) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.35, No.5, pp.917–925 (1994).
6) 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II, pp.103–121, 培風館，東京 (1965).
7) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数 $J_\nu(x)$ の数値計算法の別法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.38, No.5, pp.933–943 (1997).

付　　録

$$\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+1}\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{m/2-k-1}\frac{(-1)^i(m-2k-i-1)!}{i!(m-2k-2i-1)!}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\nu+m-i+1)}{\Gamma(\nu+2k+i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}$$

（x の同じベキでまとめると）

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+1}\sum_{l=0}^{m/2-1}\sum_{i=0}^{l}\sigma_{l-i}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\cdot\frac{(m-2l+i-1)!\Gamma(\nu+m-i+1)}{(m-2l-1)!\Gamma(\nu+2l-i+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

（σ_{l-i} を具体的に書き入れると）

$$= \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{m/2-1}\frac{(-1)^l}{(m-2l-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{l}\{(\nu+2l-2i+1)\Gamma(2\nu+2l-2i+1)$$

$$\cdot(m-2l+i-1)!\Gamma(\nu+m-i+1)\}$$

$$/\{i!(2l-2i+1)!\Gamma(\nu+2l-i+2)\}$$

（$\sum_{i=0}^{l}$ → 無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty}$ にできるので）

$$= \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{m/2-1}\frac{(-1)^l}{(m-2l-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\{(\nu+2l-2i+1)\Gamma(2\nu+2l-2i+1)$$

$$\cdot(m-2l+i-1)!\Gamma(\nu+m-i+1)\}$$

$$/\{i!(2l-2i+1)!\Gamma(\nu+2l-i+2)\}$$

上式を一般化された超幾何級数の形で表示するために，Pochhammer の記号

$$(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+i-1)$$
$$= \Gamma(\alpha+i)\,/\Gamma(\alpha)$$

で表示する公式

$$a-2i = a(1-a/2)_i\,/(-a/2)_i$$
$$\Gamma(a-2i) = \Gamma(a)\,/(2^{2i}(1/2-a/2)_i(1-a/2)_i)$$
$$\Gamma(a-i) = (-1)^i\Gamma(a)\,/(1-a)_i$$

を用いて書き直すと，

$$\sum_{k=0}^{m/2-1}\sigma_k R_{m-2k-1,\nu+2k+2}(x)$$

$$= \frac{2\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(2\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-m+1}$$

$$\cdot\sum_{l=0}^{m/2-1}(-1)^l\frac{(\nu+2l+1)\Gamma(2\nu+2l+1)}{(2l+1)!\Gamma(\nu+2l+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\{(-l-1/2)_i(m-2l)_i(-\nu-2l-1)_i$$

$$\cdot(-\nu/2-l+1/2)_i(-l)_i\}/\{i!(-\nu-l)_i$$

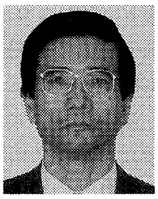
$$\cdot(-\nu-l+1/2)_i\,(-\nu-m)_i(-\nu/2-l-1/2)_i\}$$

となる．ここで，一般化された超幾何級数の和に関する定理[4)]

$$_5F_4\,(a, 1+a/2, b, c, d;$$
$$a/2, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d; 1)$$
$$= \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a-b-c)}$$
$$\cdot\frac{\Gamma(1+a-d)\Gamma(1+a-b-c-d)}{\Gamma(1+a-b-d)\Gamma(1+a-c-d)}$$

を用いれば，式 (27) が得られる．

(平成 10 年 9 月 4 日受付)
(平成 10 年 12 月 7 日採録)



吉田　年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶応義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授．昭和 63 年同経営情報学部に配置換え．平成 2 年教授．数値解析の研究に従事．特殊関数，とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味を持っている．工学博士．電子情報通信学会，日本応用数理学会会員．