順序ソート付き項書換え系のカリー化に関する一考察

4J−5

河辺 義信 冨田 一郎 石井 直宏
名古屋工業大学

1 はじめに

作用的な項書換えは、組合せ論理を表現できることから、Haskellなどの近代の関数型言語の設計や実装において重要な役割を果たしている。しかし、項書換えの理論では、これまで作用的な形式はあまり扱われていない。文献[1]では、単一ソートの場合において、関数的な項書換え系と作用的な項書換え系の間の関係に焦点が当てられ、項書換え系のカリー化によって、SN, CR, WN, WCR, UNそして完備などの性質が保存されることが示された。また、最近の関数型言語の多くが型システムを標準的に持っているにもかかわらず、型の概念を持つ項書換え系をカリー化する試みはされていない。本研究では型の概念を持つ項書換え系として順序ソート項書換え系を選び、カリー化による変換が保存する性質を明らかにする。

2 順序ソート作用的項書換え系とカリー化

順序ソート項書換え系については、文献[2]などを参照。本稿では、すべての項が有限の大きさを持つとする。また、書換え規則に対して次の二つの制限を加える。

1. 書換え規則の左辺は変数ではない。
2. 書換え規則の右辺に現れる変数は左辺にも現れる。

定義 2.1 関数的な形式の順序ソート項書換え系のシグネチャ$(S, \leq, \Sigma)$に関して、順序ソート作用的項書換え系のシグネチャ$(S', \leq, \Sigma')$を次で定義する。

ソート集合は$S' = Bas(S') \cup Der(S')$である。ただし

1. $S = Bas(S')$である。ソート$s \in S'$に関して、$s \in Bas(S')$を満たすものをS'の基本ソートと呼ぶ。
2. Σの定数以外のすべての関数記号$f : s_1 \cdots s_n \rightarrow s$および各$i \in \{0, \ldots, n-1\}$に関して、$s_{<f:s_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s, f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s>} \in Der(S')$とする。ただし、各$s_{<f:s_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s, f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s>} \notin S$とする。$s \in Der(S')$のソートを$S'$の派生ソートと呼ぶ。

また、関数記号の集合Σ'を次で定義する。

1. すべての定数$f :\rightarrow s \in \Sigma$に関して、$f :\rightarrow s \in \Sigma'$。
2. すべての関数記号$f : s_1 \cdots s_n \rightarrow s \in \Sigma (n \geq 1)$に関して$f_0 :\rightarrow s_{<f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s, f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s>} \in \Sigma'$。
3. 各関数記号$f : s_1 \cdots s_n \rightarrow s \in \Sigma (n \geq 1)$に関して、$S_i = s_{<f:s_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s, f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s>}$とすると、

$$\begin{cases} Ap : S_i\ s_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \in \Sigma' (\forall i \in \{0, \ldots, n-2\}) \\ Ap : S_{n-1}\ s_n \rightarrow s \in \Sigma' \end{cases}$$

定義 2.2 シグネチャ$(S, \leq, \Sigma)$および変数の集合Vの上の作用項は、定義2.1で定義されるシグネチャ$(S', \leq, \Sigma')$および変数の集合Vから成る項である。$(S, \leq, \Sigma)$およびV上の作用項の集合を$AT_\Sigma(V)$と書く。

定義 2.3 関数$cur : T_\Sigma(V) \rightarrow AT_\Sigma(V)$を次で定義する。

1. 項tが定数または変数の場合：$cur(t) = t$
2. 項tが$f(t_1, \ldots, t_n)(n \geq 1 \wedge f : s_1 \cdots s_n \rightarrow s)$の場合：$cur(f(t_1, \ldots, t_n)) = t'$である。ただし$S_i = s_{<f:s_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s, f:s_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_n \rightarrow s>}$とするとき、

$$\begin{cases} t'(\epsilon) & = Ap : S_{n-1}\ s_n \rightarrow s\ (\text{ただし}\epsilon\text{は空列}) \\ t'(1^n) & = f_0 :\rightarrow S_0 \\ t'(1^i) & = Ap : S_{n-i-1}\ s_{n-i} \rightarrow S_{n-i} \\ t'/1^i \cdot 2 & = cur(t_{n-i})\ (\text{ただし}\ 0 \leq i \leq n-1) \end{cases}$$

定義 2.4 順序ソート作用的項書換え系は、作用項上の項書換え系で、すべての書換え規則の左辺が$cur(t)$（項tは作用的でない項）の形をしているものである。

定義 2.5 Rを順序ソート項書換え系とする。Rのカリー化$Cu(R)$は、シグネチャΣおよび変数の集合V上の作用的項書換え系(Θ, V, R')である。ただし、Θ, R'に関して

1. Θは定義2.1のシグネチャ$(S', \leq, \Sigma')$である。
2. $R' = \{cur(l) \rightsquigarrow cur(r) | l \rightarrow r \in R\}$である。

Curried Order-Sorted Term Rewriting Systems.
Yoshinobu Kawabe, Ichirou Tomita and Naohiro Ishii
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, 466, Japan

3 $Cu(R)$ の分析

3.1 $RO(cur(t))$ と cp_t

定義 3.1 項 $t \in T_\Sigma(V)$ に関する集合 $RO(cur(t))$：

1. t が変数のとき、$RO(cur(t)) = \{\epsilon\}$
2. $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ $(n \geq 0)$ のとき、
   $RO(cur(t)) =$
   $\{\epsilon\} \cup \{1^{n-i} \cdot 2 \cdot o | 1 \leq i \leq n \wedge o \in RO(cur(t_i))\}$

補題 3.1 $\forall t \in T_\Sigma(V).[RO(cur(t)) \subseteq O(cur(t))]$

補題 3.2 任意の項 $t \in T_\Sigma(V)$ および、任意の出現 $v \in O(cur(t))$ に関して次が成り立つ。

1. $v \in RO(cur(t)) \Leftrightarrow v = \epsilon \vee \exists w.v = w \cdot 2$
2. $v \in O(cur(t)) \backslash RO(cur(t)) \Leftrightarrow \exists w.v = w \cdot 1$

定義 3.2 $O(t)(t \in T_\Sigma(V))$ を定義域とする関数 cp_t：

1. $cp_t(\epsilon) = \epsilon$
2. $cp_{f(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_n)}(i \cdot o) = 1^{n-i} \cdot 2 \cdot cp_{t_i}(o)$

項 t およびカリー化された項 $cur(t)$ があるとする。関数 cp_tは、t のある出現に対応する項 $cur(t)$ の出現を返す。$RO(cur(t))$ は関数 cp_tの値域である。

補題 3.3 関数 $cp_t : O(t) \rightarrow RO(cur(t))$ は全単射。

3.2 Rと同型な簡約グラフの埋め込み

補題 3.4 任意の項 $cur(t)$ に関して、任意の出現 $v \in O(cur(t)) \backslash RO(cur(t))$ では書換え規則は適用できない。

補題 3.5 任意の項 $cur(t)$ に関して、ある規則が出現 $v \in O(cur(t))$ で適用できるとき、$v \in RO(cur(t))$ である。

定理 3.1 関数 cur、項書換え系 $((S, \leq, \Sigma), V, R)$ およびカリー化 $Cu(R)$ に関して、次が成り立つ。

1. cur は単射である。
2. 項 $t \in T_\Sigma(V)$ および書換え規則 $l \rightarrow r$があるとする。出現 $v \in O(t)$ および代入σに関して、
   $$t/v = \sigma(l) \Leftrightarrow cur(t)/cp_t(v) = (cur \circ \sigma)(cur(l))$$
3. $t \rightarrow s$ が Rの簡約である $\Leftrightarrow$ $cur(t) \rightsquigarrow cur(s)$ が $Cu(R)$ の簡約である
4. 任意の $Cu(R)$ の簡約 $cur(t) \rightsquigarrow s$ に関して、$cur(s') = s$ かつ、$t \rightarrow s'$が Rの簡約であるような、ある項 $s' \in T_\Sigma(V)$ が存在する。
5. 項 t が Rの正規形 $\Leftrightarrow$ 項 $cur(t)$ が $Cu(R)$ の正規形

定義 3.3 順序ソート項書換え系 $((S, \leq, \Sigma), V, R)$ に関して抽象書換え系 $Ker(R)$ を $Ker(R) = (\{cur(t) | t \in T_\Sigma(V)\}, \rightsquigarrow)$ で定める。$Ker(R)$ を Rの核と呼ぶ。

定理 3.2 Rと $Ker(R)$ は、同型である。

3.3 基本ソートの項と派生ソートの項

補題 3.6 任意の順序ソート項書換え系 Rに関して、
$Ker(R) = \{t | t \in Cu(R) \wedge t$ は基本ソートを持つ $\}$

補題 3.7 任意の順序ソート項書換え系 Rに関して、
$\{t | t \in Cu(R) \wedge t$ は派生ソートを持つ項 $\}$
$= \{t/1^i | t \in Ker(R) \wedge i \in \{1, \ldots, last(O(t))\}\}$
ただし、$last(O(t))$ は次で定義される自然数 n である。

$$\begin{cases} n = 0 \Leftrightarrow O(t) = \{\epsilon\} \\ n \in O(t) \wedge n + 1 \notin O(t) \text{（その他の場合）} \end{cases}$$

4 カリー化による性質の保存

定義 4.1 順序ソート項書換え系 Rで性質 Pが成り立つとき、順序ソート項書換え系 $Cu(R)$ で性質 Pが成り立つことを、性質 Pがカリー化によって保存されると言う。

定理 4.1 両立性はカリー化によって保存される。

一般には、合流性はカリー化によって保存されない。

定理 4.2 項書換え系が両立ならば合流性は保存される。

5 まとめ

本研究では、順序ソート項書換え系にカリー化を導入し、性質の保存について考察した。

参考文献

[1] J.R.Kennaway, J.W.Klop, M.R.Sleep, F.J.de Vries, Comparing curried and uncurried rewriting. Technical Report, FTPed from ftp://ftp.sys.uea.ac.uk/pub/kennaway/, 1994.

[2] Uwe Waldmann. Compatibility of Order-Sorted Rewrite Rules. In S.Kaplan and M.Okada, editors, LNCS 516, pages 407-416. Springer-Verlag, 1990.